

## ОСОБЛИВОСТІ КВАНТУВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ СТАНІВ КРИСТАЛІЧНОГО ШАРУ В ОДНОРІДНОМУ ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

Л. І. МАЛИШЕВА

УДК 539.21  
© 2002 р.

Інститут теоретичної фізики ім. М.М.Воголюбова НАН України  
(Вул. Метрологічна, 14б, Київ 03143)

Досліджено особливості розподілу поверхневих і внутрішніх енергетичних станів для скінченного і напівнескінченного кристалів у присутності однорідного постійного електричного поля в рамках однозонної моделі і наближення сильного зв'язку. З розумними обмеженнями на параметри одержано аналітичні вирази для власних значень енергії і шляхом чисельних розрахунків продемонстровано їх хорошу точність.

### Вступ

Квантування електронних рівнів в присутності однорідного постійного електричного поля (так звана драбина Ваньє—Штарка (ВШ) [1]) є зараз одним з базових понять фізики твердого тіла. Як відомо, драбина ВШ являє собою спектр еквідистантних електронних рівнів  $E_n = \text{const} \pm n\hbar\nu_B$ , в якому міжрівнева енергетична відстань дорівнює константі Планка  $\hbar$  помноженій на частоту осциляцій Блоха  $\nu_B$ . Після введення цього поняття Ваньє в 1960 р. [1] з'явився цілий ряд робіт, де доповідалося про експериментальне спостереження ефекту ВШ, осциляцій Блоха і подібних когерентних ефектів [2, 3], а також робіт, присвячених спорідненим ефектам: тунелюванню Зенера [4], ефекту Франца—Келдиша [5] та ін.

Разом з численними моделями, що враховують різні аспекти реальних систем (багатозонна структура, електрон-електронна та електрон-фононна взаємодія), широко використовується однозонна модель в наближенні сильного зв'язку [6–16], яка відображає основні особливості реальних систем і допускає отримання аналітичних результатів. Таким чином, ця модель може служити основою для розвитку більш детальних теорій, а також для перевірки різноманітних чисельних розрахунків.

Перш ніж перейти до викладу оригінальних результатів, назвемо деякі з основних проблем, розглянутих раніше іншими авторами. Однозонна модель нескінченного кристала в присутності однорідного постійного електричного поля в наближенні сильно-

го зв'язку була розглянута в роботі [6], де було доведено існування драбини ВШ в такій системі при якзавгодно малому полі. В роботі [7] було розглянуто ту ж модель, але для обмеженого кристала з періодичними граничними умовами. Виявилось, що для появи драбини ВШ прикладена різниця потенціалів повинна перевищити деяке критичне значення (автор припустив, що таким значенням є ширина незбуреної зони). Існування спектра ВШ для обмеженого в напрямку поля кристала (тобто без використання умов періодичності) було продемонстровано в роботі [8] на основі розв'язку рівняння Шредінгера, але в цій роботі не були досліджені поверхневі ефекти, і, як показано нижче, отримана в [8] поправка до енергій Ваньє  $E_n$  потребує уточнення. Напівнескінченний кристал був розглянутий в [9] і пізніше в [10], де разом зі спектром ВШ був отриманий спектр типу Ейрі для частини області поверхневих рівнів. Особливості власних функцій і власних станів двовимірної системи ВШ в рамках однозонної моделі і наближення сильного зв'язку розглянуто в [11] і зовсім недавно в [12].

Підхід, що використаний нами в даній роботі і раніше в [13–15], як нам здається, є найбільш послідовним і дозволяє в повній мірі використати переваги аналітичного розв'язку, щоб дослідити особливості розподілу енергетичних рівнів в усій електронній зоні. На основі точного розв'язку спектральної задачі для обмеженого кристала під дією однорідного постійного електричного поля в рамках однозонної моделі і наближення сильного зв'язку, ми одержали аналітичні вирази для власних значень енергії і показали, що характер квантування електронних рівнів у межах зони, збуреної зовнішнім електричним полем, змінюється від спектра типу Ейрі на краях зони, далі від країв ідуть області з відстанню між рівнями, що дорівнює  $2\hbar\nu_B$ , а центральна частина спектра описується класичною драбиною ВШ. В даній роботі розглянуто випадок, коли прикладена до протилежних сторін кристала різниця потенціалів більша за

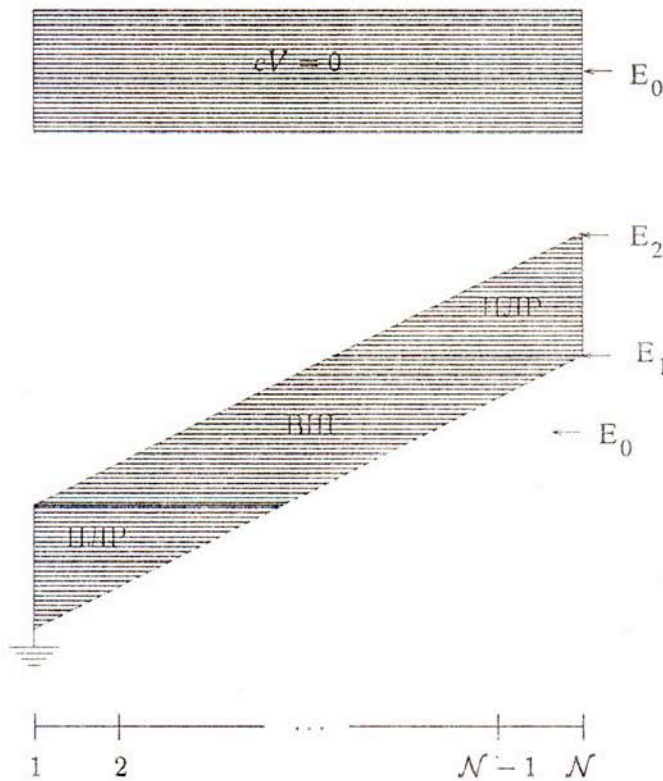


Рис. 1. Загальний вигляд однозонного спектра під дією прикладеної постійної різниці потенціалів. Незбурена зона  $eV = 0$  (верхній рисунок) і зона під впливом прикладеної різниці потенціалів  $eV > 4$  (нижній) в обмеженому кристалі товщиною  $Na$ .  $E_0$  — центр спектра, що служить точкою відліку енергії.  $E_1 = eV/2 - 2$  — верхня межа зони ВШ,  $E_2 = eV/2 + 2$  — верхня межа зони ПЛР, ширина якої дорівнює 4. Значення енергетичних величин наведено в одиницях  $\beta$

ширину незбуреної зони, що є необхідною умовою появи спектра ВШ [7]. Детальний аналіз випадку малої різниці потенціалів проведено нами раніше [14, 15].

## 1. Постановка задачі

У припущенні, що електричне поле прикладене в напрямку однієї з осей симетрії кристала, змінні в рівнянні Шредінгера розділяються і спектральна задача зводиться до одновимірної. Оскільки в наближенні найближчих сусідів спектр системи є симетричним відносно центра (на рис. 1 він позначений через  $E_0$ ), зручно відраховувати енергію саме від значення  $E_0$ . Тоді матричні елементи гамільтоніана системи мають вигляд

$$H_{nn'} = -eFa(N/2 + 1/2 - n)\delta_{n,n'} + \beta\delta_{|n-n'|,1}, \quad (1)$$

де  $n, n' = \overline{1, N}$ ,  $N$  визначає товщину кристала (див. рис.1),  $e$  — заряд електрона,  $F$  — електричне поле,  $a$  — стала ґратки,  $\beta$  — енергія резонансного переносу електрона між сусідніми вузлами кристалічної ґратки. Енергія електрона на вузлі при нульовому полі прийнята рівною нулю. Надалі одиницею енергії буде  $\beta$ , для безрозмірного параметра поля введемо позначення  $\mathcal{E} = eFa/\beta = \hbar\nu_B/\beta$ , і тоді різниця потенціалів, прикладена до меж кристала, дорівнює  $eV = \mathcal{E}(N - 1)$ .

Загальний вигляд однозонного спектра під дією прикладеної постійної різниці потенціалів зображено на рис. 1: вгорі — незбурена зона електронних рівнів ( $eV = 0$ ), внизу — зона електронних рівнів при  $eV > 4$ , тобто для випадку, коли різниця потенціалів більша за ширину незбуреної зони. Як видно на рисунку, у випадку  $eV > 4$  у центральній частині спектра, що відповідає енергії  $|E| < eV/2 - 2$ , можна виділити області біля обох меж кристала, де існування електрона є класично забороненим. Цю частину спектра надалі будемо називати зоною ВШ, а дві трикутні області, де електронні стани локалізовані біля правої і лівої меж кристала, логічно назвати зонами поверхнево-локалізованих рівнів (ПЛР). Як буде видно з подальшого аналізу, характер квантування рівнів, тобто їх розподіл в зонах ВШ і ПЛР, суттєво різний.

Задача визначення електронного спектра системи з гамільтоніаном (1), тобто знаходження власних значень матриці  $H_{nn'}$ , що задаються нулями визначника

$$D_N(E) = |E\delta_{n,n'} - \beta^{-1}H_{nn'}|, \quad (2)$$

розглядалася раніше багатьма авторами [7–10, 13–16]. Використовуючи різні методи, наприклад метод твірних функцій, рівняння  $D_N(E) = 0$  можна звести до рівняння

$$D_N(E) = [J_{\mu+(N-1)/2}(z)Y_{\mu-(N+1)/2}(z) - Y_{\mu+(N-1)/2}(z)J_{\mu-(N+1)/2}(z)] = 0, \quad (3)$$

де  $\mu \equiv E/\mathcal{E}$ ,  $z \equiv 2/\mathcal{E}$ , а  $J_\mu(z)$ ,  $Y_\mu(z)$  — функції Бесселя першого і другого роду відповідно.

Рівняння (3) містить комбінації функцій Бесселя, і тому аналіз його точних розв'язків є досить складним. Для того щоб все ж таки отримати явні вирази для власних значень енергії, доводиться знаходити і аналізувати різні наближення характеристичного рівняння (3). З метою знаходження явних виразів для електронних рівнів системи, зображеної на рис. 1, у даній роботі одержано наближення для функції  $D_N(E)$  у випадку  $\mathcal{E} \ll 1$ ,

$N \gg 1$ , що є найбільш цікавим з фізичної точки зору. Оскільки наближення, отримані в роботі, суттєво залежать від того, який інтервал енергій розглядається, аналіз електронного спектра в зонах Ваньє—Штарка і поверхнево-локалізованих рівнів проведено окремо. Відмітимо також, що завдяки симетрії спектра можна обмежитись розглядом тільки додатних значень енергії і параметра поля.

## 2. Зона Ваньє—Штарка $0 < E < eV/2 - 2$

Враховуючи властивості функцій Бесселя при великих значеннях аргумента [17], в залежності від парності величини  $N$  рівняння (3) в зоні ВШ можна наближити рівняннями

$$J_{N+1-\frac{E}{\mathcal{E}}}\left(\frac{2}{\mathcal{E}}\right) \cos\left(\frac{\pi E}{\mathcal{E}}\right) + Y_{N+1-\frac{E}{\mathcal{E}}}\left(\frac{2}{\mathcal{E}}\right) \sin\left(\frac{\pi E}{\mathcal{E}}\right) = 0 \quad (4)$$

для випадку непарної кількості вузлів,  $N = 2N + 1$ , і

$$J_{N+\frac{1}{2}-\frac{E}{\mathcal{E}}}\left(\frac{2}{\mathcal{E}}\right) \sin\left(\frac{\pi E}{\mathcal{E}}\right) - Y_{N+\frac{1}{2}-\frac{E}{\mathcal{E}}}\left(\frac{2}{\mathcal{E}}\right) \cos\left(\frac{\pi E}{\mathcal{E}}\right) = 0 \quad (5)$$

для випадку  $N = 2N$ .

Використавши у рівняннях (4), (5) асимптотики Дебая для функцій Бесселя [17], зведемо їх до таких наближених рівнянь:

$$2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi E}{\mathcal{E}}\right) - \exp\left(-\frac{4\Phi_\alpha}{\mathcal{E}} - 2\alpha\right) = 0, \quad N = 2N + 1 \quad (6)$$

і

$$2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi E}{\mathcal{E}}\right) + \exp\left(-\frac{4\Phi_\alpha}{\mathcal{E}} - 2\alpha\right) = 0, \quad N = 2N, \quad (7)$$

де введено позначення:  $\alpha = \operatorname{acosh}\{(eV/2 - E)/2\}$ ,  $\Phi_\alpha = \alpha \cosh \alpha - \sinh \alpha$ . Справедливість наближень (6) і (7) можна перевірити чисельними розрахунками. На рис. 2 продемонстровано збіг коренів рівнянь (6) (для  $N = 51$ ) і (7) (для  $N = 50$ ) при значенні параметра поля  $\mathcal{E} = 0, 1$  з коренями рівняння (3). Зрозуміло, що коренями рівнянь (3), (6), (7) є перетини цих кривих з віссю енергії.

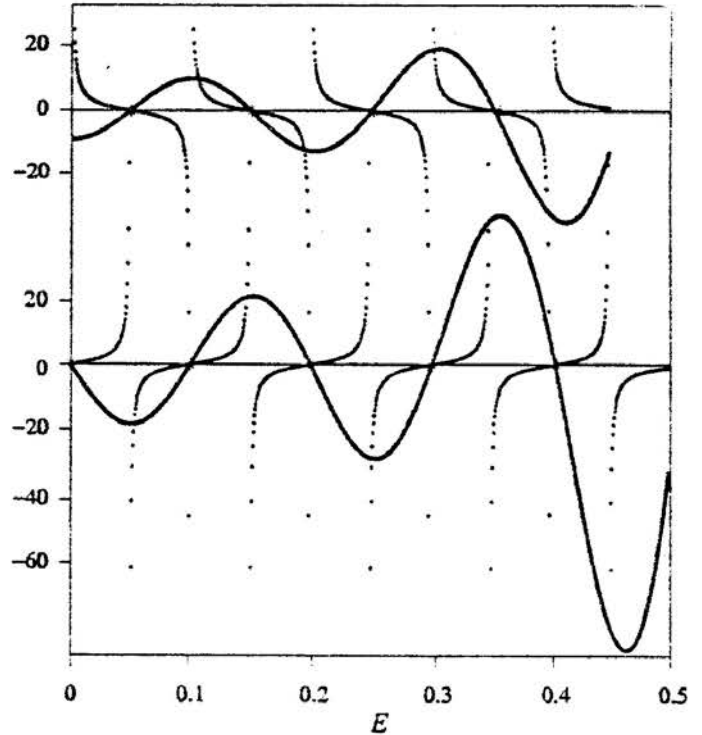


Рис. 2. Точна залежність  $D_N(E)$  в зоні ВШ: рівняння (3) — суцільні лінії, наближені залежності (6) і (7) — точки. Перетини  $D_N(E)$  з віссю  $E$  відповідають власним значенням гамільтоніана (1). Верхній графік — парна кількість вузлів  $N = 50$ , нижній графік — непарна кількість вузлів  $N = 51$ , параметр поля  $\mathcal{E} = 0, 1$

За умови  $\Phi_\alpha \gg \mathcal{E}$ , яка задовольняється практично для всіх енергій в зоні ВШ, розв'язки рівнянь (6) і (7) можна наближено визначити так:

$$E = E_n = \left\{ \begin{array}{c} n \\ n - 1/2 \end{array} \right\} \mathcal{E} + \frac{\mathcal{E}}{2\pi} e^{-\frac{4\Phi_\alpha}{\mathcal{E}} - 2\alpha_n}, \quad n = 1, 2, \dots, n_1, \quad (8)$$

де  $\alpha_n = \operatorname{acosh}\{\mathcal{E}(N - n)/2\}$ ,  $n_1$  — кількість енергетичних рівнів у верхній половині зони ВШ, а верхній і нижній множники в фігурних дужках відповідають випадкам  $N = 2N + 1$  і  $N = 2N$ . Якщо ж додатково виконується умова  $\mathcal{E}(N - n) \gg 1$ , тобто  $2 \cosh \alpha_n \approx \exp \alpha_n$ , вираз (8) спрощується таким чином:

$$E = E_n = \left\{ \begin{array}{c} n \\ n - 1/2 \end{array} \right\} \mathcal{E} + \frac{2\mathcal{E}}{\pi(eV - 2\mathcal{E}n)^2} \left\{ \frac{e}{\mathcal{E}(N - n)} \right\}^{2(N-n)}. \quad (9)$$

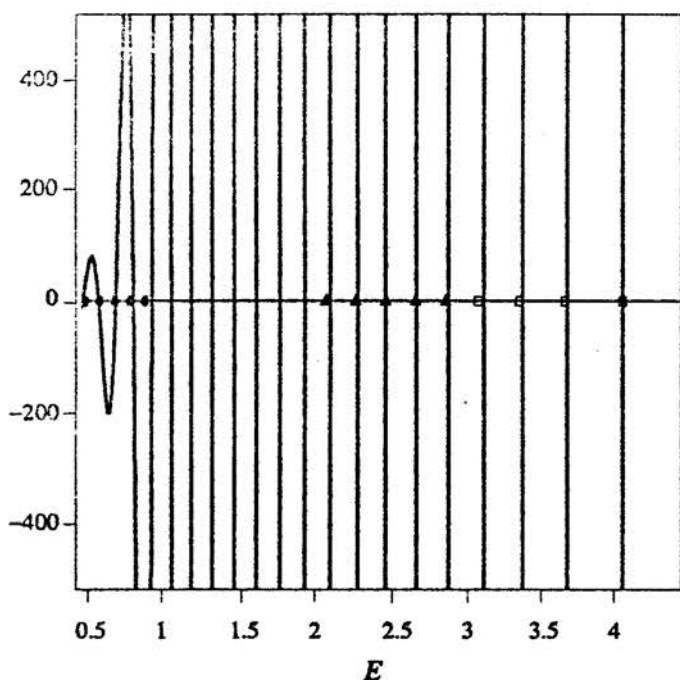


Рис. 3. Точна залежність  $D_N(E)$  в зоні ПЛР для  $N = 50$ ,  $\mathcal{E} = 0,1$ . Наближені значення енергетичних рівнів (15а), (15b) і (15с) позначені точками, трикутниками і квадратами відповідно

Виведена тут поправка до енергій Ванье  $E_n = n\mathcal{E}$  (або  $E_n = (n - 1/2)\mathcal{E}$ ) знайдена більш послідовним методом, ніж у [8], оскільки не містить ніяких невизначених констант і чітко показує необхідне обмеження на параметри,  $\mathcal{E}(N - n) > e$ , яке не було з'ясовано в [8].

Проведені розрахунки демонструють хороше узгодження розв'язків отриманих наближених рівнянь (6) і (7) (їх позначено на рис. 2 зірочками) з точними розв'язками рівняння (3).

### 3. Зона поверхнево-локалізованих рівнів, $eV/2 - 2 < E < eV/2 + 2$

Для розглянутого нами випадку  $eV > 4$  ширина зони ПЛР дорівнює ширині незбуреної зони (див. рис. 1). Використавши знову асимптотики функцій Бесселя [17] в енергетичному інтервалі  $eV/2 - 2 < E < eV/2 + 2$ , рівняння (3) з хорошою точністю можна наближити таким чином:

$$D_N(E) \approx \frac{\mathcal{E}}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\sin \xi \sinh \delta}} \times \cos \left( \frac{2\Phi_\xi}{\mathcal{E}} + \xi - \frac{\pi}{4} \right) \exp \left( \frac{2\Phi_\delta}{\mathcal{E}} + \delta \right) = 0, \quad (10)$$

де

$$2 \cosh \delta = E + \frac{eV}{2}, \quad \Phi_\delta = \delta \cosh \delta - \sinh \delta, \quad (11)$$

$$2 \cos \xi = E - \frac{eV}{2}, \quad \Phi_\xi = \sin \xi - \xi \cos \xi. \quad (12)$$

Очевидно, рівняння (10) задовольняють розв'язки трансцендентного рівняння

$$\frac{2}{\mathcal{E}} \Phi_\xi + \xi + \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots, n_2, \quad (13)$$

де  $n_2$  - кількість поверхнево-локалізованих рівнів. З'ясуємо цю величину.

Загальна кількість енергетичних рівнів для додатних енергій, очевидно, є  $n_1 + n_2 = \left[ \frac{N+1}{2} \right]$ , де квадратні дужки (тут і далі) позначають цілу частину числа. Для непарних  $N$  в цю кількість входить і рівень  $E = 0$ , тому загальна кількість рівнів в усій енергетичній зоні завжди  $N$ . Підставивши в (13) значення  $E = E_1 = eV/2 - 2$ , одержимо оцінку кількості ПЛР в такому вигляді:

$$n_2 = \left[ \frac{2}{\mathcal{E}} + \frac{5}{4} \right]. \quad (14)$$

Ця оцінка відрізняється від отриманої в [10] доданком  $5/4$ . Як показують розрахунки (див. також рис. 3), для розглянутих нами параметрів кристала вираз (14) точніше визначає кількість ПЛР, ніж вираз, отриманий в [10].

Розв'язки трансцендентного рівняння (13) досить легко можна наближено визначити в таких трьох енергетичних інтервалах: поблизу нижньої межі зони ПЛР ( $E - E_1 \ll 1$ ), в середині зони ПЛР ( $|E - eV/2| \ll 1$ ) і біля верхньої межі зони ( $E_2 - E \ll 1$ ), див. рис. 1. З урахуванням зазначених обмежень за енергією, маємо замість (13)

$$E_n = \frac{eV}{2} + \begin{cases} -\mathcal{E} \left( n - \frac{5}{4} \right), & n = n_2, n_2 - 1, \dots, \quad (a) \\ 2\mathcal{E} \left( n + \frac{2}{\pi\mathcal{E}} + \frac{3}{4} - \left[ \frac{2}{\pi\mathcal{E}} + \frac{3}{4} \right] \right), & n = 0, \pm 1, \dots, \quad (b) \\ 2 - \left\{ \frac{3}{2}\pi \left( n - \frac{1}{4} \right) \mathcal{E} \right\}^{2/3} + \mathcal{E}, & n = 1, 2, \dots \quad (c) \end{cases} \quad (15)$$

Як показує порівняння з чисельними розрахунками, явні вирази (15) дають власні значення енергії поверхневих рівнів з хорошою точністю, причому на більшій частині енергетичного інтервала зони ПЛР. На рис. 3 наведено приклад для  $\mathcal{N} = 50$ ,  $\mathcal{E} = 0,1$  (ми не наводимо рисунок для  $\mathcal{N} = 51$ , оскільки, на відміну від зони ВШ, в зоні ПЛР немає різниці в аналізі випадків парних і непарних  $\mathcal{N}$ ). Точки на рис. 3 демонструють, що вираз (15a) добре наближає власні значення енергії поблизу межі зони ПЛР із зоною ВШ. В центрі зони ПЛР маємо перехідну область (між областю, в якій реалізується класична драбина ВШ, та приповерхневою областю кристала), де працює залежність (15b) (показана трикутниками), що задає відстань між енергетичними рівнями, рівню  $2\mathcal{E}$ . Нарешті, біля верхньої межі зони ПЛР, тобто біля края спектра, можна користуватись виразом (15c), що дає рівні, позначені на рисунку квадратами.

Відмітимо, що залежність (15c) має вигляд спектра Ейрі (див., наприклад, [18]) і була отримана різними авторами для випадку напівнескінченного кристала [7, 9, 10]. В той же час, наскільки нам відомо, залежності (15a) і (15b) для зони ПЛР одержано вперше. Ці результати доводять, що, по-перше, квантування рівнів у нескінченній трикутній ямі (з вертикальною і похилою стінками), якому відповідають нулі функції Ейрі, описує далеко не повністю спектри ПЛР за наявності однорідного електричного поля. По-друге, правило квантування Ван'є,  $E_n = \text{const} + n\mathcal{E}$ , діє і за межами зони ВШ, але для обмеженої кількості рівнів і при відповідному виборі відрахунку енергії ( $\text{const}$ ), який залежить від поля, див. (15a).

#### 4. Напівнескінченна зона

Для напівнескінченного кристала використана вище точка відліку енергії вже не зручна. Якщо зафіксувати енергію  $E = 0$  для  $n = 1$ , гамільтоніан (1) набуває вигляду  $\beta^{-1}H_{nn'} = \mathcal{E}(n-1) + \delta_{|n-n'|,1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а рівняння (3) на власні значення можна переписати так:

$$D_{\mathcal{N}}(E) = J_{\mu+1}(z)Y_{\mu-\mathcal{N}}(z) - Y_{\mu+1}(z)J_{\mu-\mathcal{N}}(z) = 0. \quad (16)$$

$$\text{Спрямувавши } \mathcal{N} \text{ до нескінченності, маємо при } \mathcal{E} > 0 \quad J_{-\mu-1}(2/\mathcal{E}) = 0, \quad (17)$$

тобто одноелектронні рівні заповнюють напівнескінченний інтервал  $E > -2$ .

Рівняння (17) та його аналоги було використано для аналізу впливу зовнішнього електричного поля на енергетичний спектр системи в роботах [9, 10]. Зрозуміло, що така модель (з нескінченим  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ ) не еквівалентна моделі з довільним скінченим  $\mathcal{N}$  (навіть якщо  $\mathcal{N} \gg 1$ ). Зокрема, рівняння (17) не описує випадок  $eV < 4$ . Але можна сподіватись, що при  $eV > 4$  принципові фізичні результати стосовно поведінки енергетичних рівнів в зонах ПЛР і ВШ можна вивести і з рівняння (17). Щоб перевірити це припущення, а також пов'язати наші результати з тими, що були отримані раніше іншими авторами, в цьому розділі ми розглянемо випадок  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ .

По аналогії з випадком скінченного  $\mathcal{N}$ , розглянутим вище, енергетичний інтервал можна розділити на зони ПЛР ( $|E| < 2$ ) і ВШ ( $E > 2$ ). Знову використавши асимптотики функцій Бесселя, знаходимо такі наближені значення енергетичних рівнів у зоні ПЛР для випадку напівнескінченного кристала:

$$E_n = \begin{cases} -2 + \left\{ \frac{3\mathcal{E}}{2} \pi \left( n - \frac{1}{4} \right) \right\}^{2/3} - \mathcal{E}, & n = 1, 2, \dots, \quad (a) \\ \pi \sqrt{1 - \frac{4\mathcal{E}}{\pi} \left( \frac{2}{\pi\mathcal{E}} + \frac{1}{4} - n \right)} - \pi - \mathcal{E}, & n = \bar{n}, \bar{n} \pm 1, \dots, \quad (b) \\ (n-1)\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{4}, & n = n_2, n_2 - 1, \dots, \quad (c) \end{cases} \quad (18)$$

$\bar{n} = \left[ \frac{2}{\pi\mathcal{E}} + \frac{1}{4} \right]$ ,  $n_2 = \left[ \frac{2}{\mathcal{E}} + \frac{5}{4} \right]$ . Добре видно, що вирази (18) є аналогами виразів (15), справедливих для випадку скінченного  $\mathcal{N}$ .

Формально асимптотики (18) справедливі для нижньої межі зони ПЛР, середини цієї зони і верхньої межі зони ПЛР відповідно. Але, як показують розрахунки, наближення (18) добре працюють у значно ширших інтервалах змін енергії, що проілюстровано на рис. 4. Цікаво, що особливо вдалою виявилась апроксимація (18b). Як видно з рис. 4, ця формула з хорошою точністю визначає власні значення енергії на протязі всієї зони ПЛР. Рис. 4 також ілюструє правильність виразу (14) для кількості ПЛР у напівнескінченному кристалі: для значень параметра поля  $\mathcal{E} = 0, 1, 0, 15$  і  $0, 2$  кількість ПЛР дорівнює  $n_2 = 21, 14$  і  $11$  відповідно.

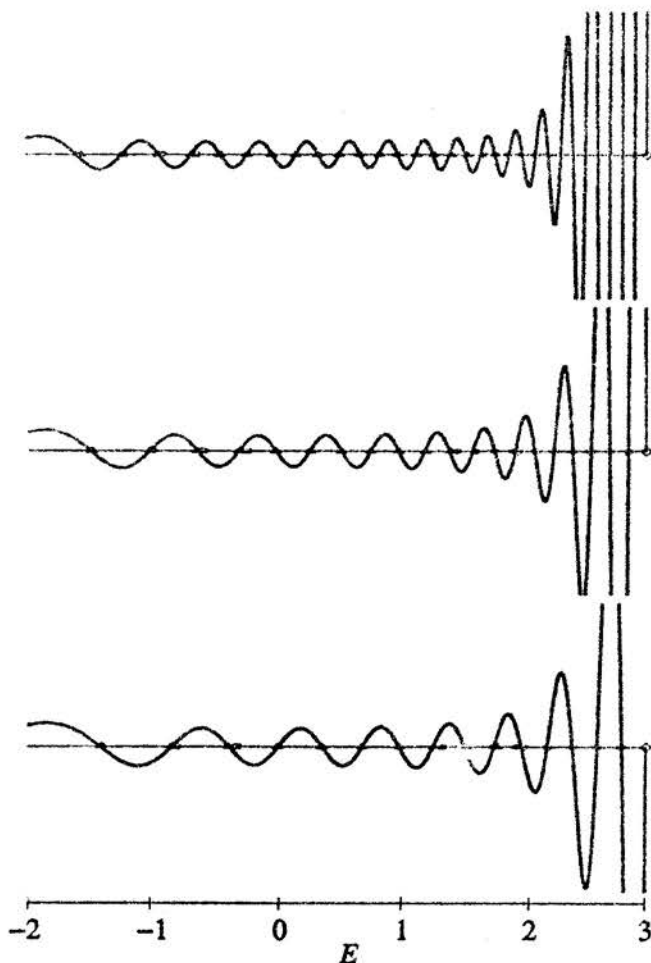


Рис. 4. Точна залежність  $J_{-E/\epsilon-1}(2/\epsilon)$  від  $E$  (суцільні лінії) для (зверху вниз)  $E = 0, 1; 0,15$  і  $0,2$ . Наближення (18a), (18b) і (18c) позначено квадратами, трикутниками і точками відповідно. Ромбами позначено енергії (19)

Нарешті, для зони ВІІ ( $E > 2$ ) знайдемо поправки до енергій Ваньє  $E_n = n\epsilon$ , аналогічні (9). Провівши аналіз, подібний до здійсненого в розділі 2, отримуємо в результаті для  $n\epsilon \gg 1$

$$E_n = n\epsilon - \frac{\epsilon}{2\pi} \left\{ \frac{e}{\epsilon(n+1)} \right\}^{2(n+1)},$$

$$n = n_2 + 1, \dots, \quad (19)$$

тобто для енергій, більших за  $e$ , поправки до енергій Ваньє у напівнескінченному кристалі є несуттєвими. Цей факт продемонстровано на рис. 4 для різних значень параметра  $\epsilon$ . Крім того, як впливає з рівняння (18с), поблизу межі зони ВІІІ квантування Ваньє

$E_{n+1} - E_n = n\epsilon$  також дає хороше наближення для спектра.

Таким чином, за винятком непринципових деталей, аналіз рівняння (17) дає ті ж самі висновки щодо електронного спектра кристала в присутності електричного поля. Підкреслимо, що зміна характеру квантування від краю до центра спектра в послідовності: спектр Ейрі  $\rightarrow$  квантування з подвійним Ваньєквантом  $2\epsilon \rightarrow$  драбина ВІІІ — отримано тут за умови сильного збурення, коли параметр поля перевищує середню відстань між рівнями у незбуреній зоні. Тому ця закономірність не повинна залежати від структури зони, простота якої дозволила одержати результат аналітично.

Досліджена тут залежність електронного спектра від прикладеного електричного поля має безпосереднє відношення до багатьох фізичних явищ. Зокрема, за певних умов, відносно положення рівнів та їх зміщення із зміною прикладеної різниці потенціалів має проявлятися в резонансному тунелюванні електронів крізь тонкий шар кристала-діелектрика. Однак спостереження відповідної резонансної структури є насправді дуже складним через маскуючі ефекти міжзонної взаємодії, розсіювання на фонах і дефектах тощо. Вивчення проблеми в цьому аспекті потребує спеціального розгляду і обговорення.

Автор висловлює щирі вдячності О. Оніпку за детальне обговорення результатів і увагу до роботи.

1. Wannier G.H. // Phys. Rev. — 1960. — 117. — P.432; Rev. Mod. Phys. — 1962. — 34. — P.645.
2. Mendez E.E., Bastard G. // Physics Today. — 1993. — 46. — P.34.
3. Rossi F. // Semicond. Sci. and Technol. — 1998. — 13. — P.147.
4. C. Zener // Proc. Roy. Soc. — 1934. — 145. — P.523.
5. Franz W. // Z. Naturforsch. Teil A. — 1958. — 13. — P.484; Keldysh L.V. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1958. — 34. — P.1138 [Sov. Phys. JETP. — 1958. — 34. — P.788].
6. Hacker K., Obermair G. // Z. Physik. — 1970. — 234. — P.1.
7. Saitoh M. // J. Phys. C: Solid State Phys. — 1973. — 6. — P.3255.
8. Stey G.C., Gusman G. // Ibid. — P.650.
9. Fukuyama H., Bari R.A., Fogedby H.C. // Phys. Rev. B. — 1973. — 8. — P.5579.
10. Yakovenko V.M., Goan H.-S. // Ibid. — 1998. — 58. — P.8002.
11. Nakanishi T., Ohtsuki T., Saitoh M. // J. Phys. Soc. Jpn. — 1995. — 64. — P.2032.
12. Keck F., Korsch H.J. // J. Phys. A. — 2002. — 35, L105.
13. Малишева Л. І. // УФЖ. — 2000. — 45. — С.1475.
14. Оніпка А.І., Малишева Л.І. // Solid State Commun. — 2001. — 118. — P.53.
15. Оніпка А.І., Малишева Л.І. // Phys. Rev. B. — 2001. — 63. — 235410.