

## Теория квантового транспорта электронов через две последовательно соединенные планарные структуры

Ю. А. Клименко

*Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины,  
Украина, 252207, г. Киев, пр. академика Глушкова, 40*

А. И. Онипко

*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины,  
Украина, 252143, г. Киев, ул. Метрологическая, 146*

Статья поступила в редакцию 22 февраля 1994 г., после переработки 3 мая 1994 г.

Впервые получено точное формальное решение задачи об определении амплитуд рассеяния при прохождении электронами двух последовательно соединенных проводом двумерных структур в терминах матриц рассеяния каждой из компонент системы. Показано, что развитый формализм может быть эффективно использован при исследовании транспортных и спектральных характеристик квантовых систем со сложной геометрией. В частности, предсказано нелинейное изменение числа резонансов в спектре пропускания провода с двойным прямоугольным изгибом при увеличении расстояния между поворотами провода. В приложении к описанию проводимости провода с сужением получено аналитическое выражение, практически точно воспроизводящее поведение проводимости как функции энергии Ферми при любых параметрах системы.

Вперше одержано точний формальний розв'язок задачі визначення амплітуд розсіяння при проходженні електронів крізь дві послідовно з'єднані дротом двовимірні структури в термінах матриць розсіяння кожної з компонент системи. Показано, що розвинений формалізм може бути ефективно застосований для вивчення транспортних і спектральних характеристик квантових систем складної геометрії. Зокрема, передбачено нелінійну зміну кількості резонансів в спектрі прозорості дроту з подвійним прямокутним згином при зростанні відстані між згинами. При застосуванні теорії до визначення провідності провода із звуженням одержано аналітичний вираз, що майже точно описує поведінку провідності як функції енергії Фермі при будь-яких параметрах системи.

### 1. Введение

Традиционный подход к изучению явлений низкотемпературной электропроводности связан с решением кинетического уравнения Больцмана и в той или иной мере использует концепцию длины свободного пробега электрона. Прогресс в области изготовления планарных субмикронных структур на основе соединений  $\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  сделал возможным получение образцов, характерные размеры которых сравнимы с фермиевской длиной волны электрона ( $\lambda_F \approx 10\text{--}100\text{ нм}$ ) и в то же время намного меньше длины фазовой когерентности. В этих условиях низкотемпературный электронный транспорт является волновым процессом, а его характеристики определяются в основном геометрией системы, играющей, по существу, роль электронного волновода.

Систематическое исследование квантово-механических эффектов, лежащих в основе проводящих свойств двумерных структур малых размеров, начато сравнительно недавно. Отметим эффект квантования электронной проводимости в узком

проводе [1,2] и обнаружение резонансного туннелирования электронов через квантовый дот [3]. Один из наиболее распространенных подходов к описанию упомянутых и других эффектов, обусловленных геометрией рассеивающих областей, основан на теории Ландауэра—Буттикера (см., например, [4]), устанавливающей связь между электронной проводимостью системы и помодовыми вероятностями рассеяния электронных волн. Из-за сильного, как правило, смешивания при рассеянии большого числа мод расчет конкретных характеристик процессов переноса связан со значительными затратами компьютерного времени, которые быстро возрастают даже при относительно небольших усложнениях системы. Однако для создания квантовых электронных приборов и, тем более, интегральных схем необходимо изучение все более сложных систем. С этой точки зрения представляется актуальной такая постановка задачи рассеяния, которая позволила бы использовать более простые решения, полученные для структурных компонент системы. Формулировка данной проблемы и ее решение для случая, когда

объект исследования представляет собой две последовательно соединенные проводом произвольные структуры, составляют основное содержание работы.

Предпринятые до настоящего времени попытки решения подобной задачи относятся в основном к случаю одномерного прохождения электронов [5,6]. Нами в разд. 2,3 эта задача решается в общем виде. В разд. 4 получен явный вид асимптотически точного выражения для вероятности прохождения в системе волны фундаментальной моды. В разд. 5 продемонстрирована эффективность предложенной теории в приложениях к конкретным структурам. В частности, в случае квантового провода с двойным изгибом предсказывается «просмотренный» ранее эффект немонотонного увеличения числа резонансов в спектре пропускания системы с ростом длины соединяющего провода. Уточнена также формула проводимости для провода, имеющего сужение. Эти и другие результаты работы резюмируются в заключительном разд. 6.

## 2. Постановка задачи и вывод уравнений

Рассмотрим прохождение электронов через две произвольные последовательно соединенные двухтерминальные структуры, которые для удобства расположим внутри соответствующих кривых  $\partial\Gamma_s$ ,  $s = I, II$  (рис. 1,а). В этих областях мы должны решить стационарное уравнение Шредингера

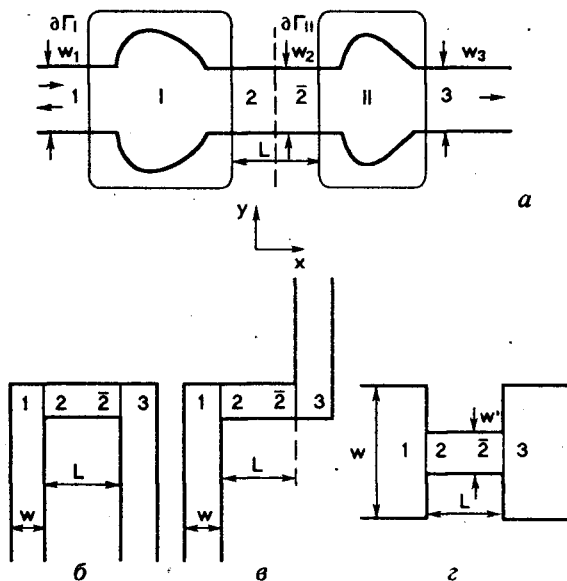


Рис. 1. Схематическое изображение рассматриваемой системы двух последовательно соединенных структур (приборов) I и II. Выбор границ сшивки волновых функций и их производных обозначен цифрами 1, 2, 2̄, 3. Ширины эмиттерного, соединительного и коллекторного проводов обозначены  $w_1$ ,  $w_2$  и  $w_3$  соответственно,  $L$  — длина соединительного провода (а). Простейшие реализации системы: П-структура (б), ступенька (в), сужение провода (г).

$$\Delta\Psi_s + \frac{2m^*}{\hbar^2} [E_F - U_s] \Psi_s = 0 \quad (1)$$

( $E_F$  и  $m^*$  — полная энергия и эффективная масса электрона;  $U_s$  — потенциальный рельеф структуры  $s$ ). Необходимо также удовлетворить соответствующим граничным условиям. Вне областей  $\Gamma_s$  и в окрестности пересечений  $\partial\Gamma_s$  с квантовыми проводами будем считать их однородными в продольном  $x_n$  направлении:  $U_s = U_s(y_n)$ . Поэтому на границах  $x_n = 0$  ( $n = 1, 2, \bar{2}, 3$ ), где  $\partial\Gamma_s$  пересекает квантовый провод, волновая функция электрона  $\Psi_s$  и ее нормальная производная могут быть разложены по собственным функциям квантового канала  $n$ :

$$\Psi_s \Big|_{x_n = +0} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(n)} \varphi_j^{(n)}(y_n), \quad (2a)$$

$$\frac{\partial\Psi_s}{\partial x_n} \Big|_{x_n = +0} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{(n)} \varphi_j^{(n)}(y_n). \quad (2б)$$

Здесь значения индекса  $n$  относятся к эмиттерному (1), соединительному (2,2̄) и коллекторному (3) проводам;  $a_j^{(n)}$ ,  $b_j^{(n)}$  — коэффициенты разложения, относящиеся к первой ( $n = 1, 2$ ) и второй ( $n = \bar{2}, 3$ ) структурным компонентам системы;  $\varphi_j(y_n)$  — ортогональный набор волновых функций, связанный с поперечным движением электронов. Индекс  $j$  нумерует квантовые числа (моды) поперечного движения, обозначаем далее  $\chi_j^{(n)}$ . Координаты выбираются так, чтобы оси  $x_n$  были направлены в глубину структуры.

Поскольку на указанных границах волновая функция системы в целом, а также ее производные должны удовлетворять условиям непрерывности, волновые функции  $\Psi_s$  необходимо шить с волновыми функциями  $\Psi_n$  в соответствующих квантовых проводах.

Рассматривая пока каждую структуру как изолированную, т.е. разделив систему, как это показано пунктирной линией на рис. 1,а, можем записать

$$\Psi_n = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ I_j^{(n)} e^{ik_j^{(n)} x_n} + r_j^{(n)} e^{-ik_j^{(n)} x_n} \right] \varphi_j^{(n)}(y_n), \quad (3)$$

$$n = 1, 2, \bar{2}, 3,$$

где  $I_j^{(n)}$  и  $r_j^{(n)}$  — амплитуды падающих и отраженных волн;  $k_j^{(n)}$  — продольное волновое число электрона, отвечающее  $j$ -й моде.

При рассеянии электрона в каждой из структур должен выполняться закон сохранения энергии

$$\frac{2m^*}{\hbar^2} E_F = k_j^{(n)2} + \chi_j^{(n)2}, \quad (4)$$

$$n = 1, 2, \bar{2}, 3, \quad 1 \leq j < \infty.$$

Уравнение (4) справедливо как для вещественных, так и для чисто мнимых волновых чисел  $k_j^{(n)}$ . В первом случае  $k_j^{(n)}$  отвечают распространяющимся электронным волнам в  $n$ -м проводе. Мнимые значения волновых чисел соответствуют затухающим электронным волнам с заданной энергией  $E_F$ .

Условие непрерывности волновой функции на границах  $x_n = 0$  будет удовлетворено, если

$$f_j^{(n)} + r_j^{(n)} = a_j^{(n)}, \quad n = 1, 2, \bar{2}, 3. \quad (5)$$

В результате сшивки (2б) с производной по нормали от (3) получаем

$$ik_j^{(n)} a_j^{(n)} + b_j^{(n)} = 2ik_j^{(n)} f_j^{(n)}, \quad n = 1, 2, \bar{2}, 3. \quad (6)$$

Приведенные уравнения не связаны, как видно, с конкретной геометрией и потенциалом областей  $G_s$ . Учет специфики этих областей приведет к появлению новых неизвестных и соответствующих уравнений, которые совместно с (5) и (6) полностью определяют волновую функцию каждой из компонент системы. Однако в данном подходе конкретный вид упомянутых уравнений не используется. Существенно только, что они линейны и однородны, т.е. не содержат амплитуд падающих волн. Поэтому недостающие уравнения можно записать в общем виде

$$S_s X_s = 0, \quad (7)$$

где  $S_s$  — некоторая матрица, отвечающая структуре  $s = I, II$ , а  $X_s$  — вектор-столбец, определяющий коэффициенты разложения  $\Psi_s$  в заданном базисе.

Определим теперь помодовые вероятности прохождения из канала  $n'$  в канал  $n$  волны моды  $j_0$  в волну  $j$ -й моды  $T_{jj_0}(n, n')$ . Для этого удобно воспользоваться законом сохранения полного потока через систему. Как обычно, в задаче рассеяния амплитуды падающих волн задаются граничным условием. Пусть в  $n$ -канале  $f_j^{(n)}$  отлично от нуля для  $j = 1, 2, \dots, N_n$ . (Заметим, что в силу (4), т.е. при заданной энергии электрона,  $j = N_n$  соответствует распространяющейся электронной волне с наименьшим волновым вектором  $k_{N_n}^{(n)}$ .) Поскольку сохраняется полный поток, имеем

$$\sum_{n=1(2)}^{2(3)} \sum_{j=1}^{N_n} k_j^{(n)} |r_j^{(n)}|^2 = \sum_{n=1(2)}^{2(3)} \sum_{j=1}^{N_n} k_j^{(n)} |f_j^{(n)}|^2. \quad (8)$$

Полагая в (8)  $f_j^{(n)} = \delta_{jj_0} \delta_{nn'}$  и используя (5), находим

$$T_{jj_0}(n, n') = |t_{jj_0}(n, n')|^2, \quad (9)$$

где амплитуда соответствующей вероятности определяется выражением

$$t_{jj_0}(n, n') = \alpha_{jj_0}(n, n') \left[ a_j^{(n)} - \delta_{jj_0} \delta_{nn'} \right], \quad (10)$$

где  $\alpha_{jj_0}(n, n') = \left( k_j^{(n)} / k_{j_0}^{(n')} \right)^{1/2}$ .

В (9), (10)  $n, n'$  принимают значения 1, 2 для подсистемы I и  $\bar{2}, 3$  — для II. При совпадающих индексах  $n$  и  $n'$  вероятность  $T_{jj_0}(n, n)$  имеет смысл коэффициента отражения, а при  $n \neq n'$  — коэффициента прохождения через систему.

Отметим, что определение (10) можно формально распространить на произвольные индексы  $j$  и  $j_0$ . Тогда бесконечномерная матрица  $\tilde{t}_{jj'}(n, n')$  будет содержать конечное множество потоковых амплитуд (равное  $N_n N_{n'}$ ) и бесконечное число величин, которые отвечают хотя бы одному чисто мнимому волновому числу  $k_j^{(n)}$  или  $k_{j'}^{(n')}$ , удовлетворяющему (4). В отличие от матрицы амплитуд рассеяния ( $S$ -матрицы), полная матрица  $\tilde{t}_{jj'}(n, n')$  уже не является унитарной, хотя и сохраняет определенные свойства  $S$ -матрицы. В частности, как и для последней, имеет место используемое в дальнейшем соотношение симметрии  $\tilde{t}_{jj'}(n, n') = \tilde{t}_{j'j}(n', n)$ .

Устанавливаемая в (10) связь между коэффициентами  $a_j^{(n)}$  и амплитудами вероятности прохождения справедлива для любой двухтерминальной структуры и легко обобщается на случай произвольного числа падающих волн, т.е. отличных от нуля амплитуд  $f_j^{(n)}$ . Можно показать (см. Приложение), что в последнем случае вместо (10) имеем

$$a_j^{(n)} = \sum_{n'=1(\bar{2})}^{2(3)} \sum_{j'=1}^{\infty} \alpha_{j'j}(n', n) \left[ t_{jj'}(n, n') + \delta_{jj'} \delta_{nn'} \right] f_{j'}^{(n')}. \quad (11)$$

Перейдем к рассмотрению системы в целом. Соединив структуры I и II посредством канала  $2, \bar{2}$  таким образом, чтобы  $x_2 = \dots = (x_{\bar{2}} + L)$ , а  $y_2 = y_{\bar{2}}$  (рис.1,а), волновую функцию электрона в соединяющем проводе длиной  $L$  можно записать в виде

$$\Psi_L = - \sum_{j=1}^{\infty} \left[ a_j^{(2)} \frac{\sin [k_j^{(2)} x_2]}{\sin [k_j^{(2)} L]} + a_j^{(\bar{2})} \frac{\sin [k_j^{(2)} x_2]}{\sin [k_j^{(2)} L]} \right] \varphi_j^{(2)}(y_2). \quad (12)$$

Нетрудно убедиться, что  $\Psi_L$  удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера с энергией  $E_F$  и с учетом (2а), (2б) сохраняет непрерывность полной волновой функции системы на границах отрезка  $x_2 = 0, x_2 = 0$ . Сшивая производные от  $\Psi_L$  и  $\Psi_S$ , найдем на этих же границах

$$-a_j^{(2)} k_j^{(2)} \operatorname{ctg} [k_j^{(2)} L] + a_j^{(2)} \frac{k_j^{(2)}}{\sin [k_j^{(2)} L]} + b_j^{(2)} = 0, \quad (13)$$

$$a_j^{(2)} \frac{k_j^{(2)}}{\sin [k_j^{(2)} L]} - a_j^{(\bar{2})} k_j^{(2)} \operatorname{ctg} [k_j^{(2)} L] + b_j^{(\bar{2})} = 0.$$

Дополнив (13) уравнениями (6), (7), получим уравнения для определения волновой функции системы двух последовательно соединенных структур. В результате полная система уравнений задачи может быть представлена как

$$\begin{cases} ik_j^{(1)} a_j^{(1)} + b_j^{(1)} = 2ik_j^{(1)} f_j^{(1)}, \\ S_I X_I = 0, \\ ik_j^{(2)} a_j^{(2)} + b_j^{(2)} = u_j a_j^{(2)} - v_j a_j^{(\bar{2})}, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} ik_j^{(2)} a_j^{(\bar{2})} + b_j^{(\bar{2})} = u_j a_j^{(\bar{2})} - v_j a_j^{(2)}, \\ S_{II} X_{II} = 0, \\ ik_j^{(3)} a_j^{(3)} + b_j^{(3)} = 2ik_j^{(3)} f_j^{(3)}, \end{cases}$$

где

$$u_j = \frac{k_j^{(2)}}{\sin [k_j^{(2)} L]} \exp [ik_j^{(2)} L], \quad v_j = \frac{k_j^{(2)}}{\sin [k_j^{(2)} L]}.$$

Легко видеть, что матрицы левых частей систем (6), (7) и (14) совпадают. Рассматривая все члены правой части в (14) как амплитуды падающих волн, согласно (11), можем записать

$$a_j^{(1)} = \sum_{j'=1}^{\infty} \left\{ \alpha_{j'j}^{(1)}(1, 1) [\tilde{r}_{jj'}(1, 1) + \delta_{jj'}] f_j^{(1)} + \alpha_{j'j}^{(1)}(1, 1) \tilde{r}_{jj'}(1, 2) x_{j'j_0} \right\}, \quad (15)$$

$$a_j^{(3)} = \sum_{j'=1}^{\infty} \left\{ \alpha_{j'j}^{(3)}(1, 3) \tilde{r}_{jj'}(3, \bar{2}) y_{j'j_0} + \alpha_{j'j}^{(3)}(3, 3) [\tilde{r}_{jj'}(3, 3) + \delta_{jj'}] f_j^{(3)} \right\}, \quad (16)$$

$$a_j^{(2)} = \sum_{j'=1}^{\infty} \left\{ \alpha_{j'j}^{(2)}(1, 2) \tilde{r}_{jj'}(2, 1) f_j^{(1)} + \alpha_{j'j}^{(2)}(1, 2) [\tilde{r}_{jj'}(2, 2) + \delta_{jj'}] x_{j'j_0} \right\}, \quad (17)$$

$$a_j^{(\bar{2})} = \sum_{j'=1}^{\infty} \left\{ \alpha_{j'j}^{(\bar{2})}(1, 2) [\tilde{r}_{jj'}(\bar{2}, \bar{2}) + \delta_{jj'}] y_{j'j_0} + \alpha_{j'j}^{(\bar{2})}(3, 2) \tilde{r}_{jj'}(\bar{2}, 3) f_j^{(3)} \right\}, \quad (18)$$

где введены обозначения

$$x_{jj_0} = \frac{1}{2i \sqrt{k_j^{(2)} k_{j_0}^{(1)}}} [u_j a_j^{(2)} - v_j a_j^{(\bar{2})}], \quad (19)$$

$$y_{jj_0} = \frac{1}{2i \sqrt{k_j^{(2)} k_{j_0}^{(1)}}} [u_j a_j^{(\bar{2})} - v_j a_j^{(2)}].$$

Полагая теперь в (15) и (16)  $f_j^{(1)} = \delta_{jj_0}, f_j^{(3)} = 0$  и используя определение (10) для амплитуд вероятности отражения ( $n = n' = 1$ ) и прохождения ( $n' = 1, n = 3$ ) волны моды  $j_0$  в волну  $j$ -й моды для системы в целом, получаем

$$t_{jj_0}^S(1, 1) = \tilde{r}_{jj_0}(1, 1) + \sum_{j'=1}^{\infty} x_{j'j_0} \tilde{r}_{jj'}(1, 2), \quad (20)$$

$$t_{jj_0}^S(3, 1) = \sum_{j'=1}^{\infty} y_{j'j_0} \tilde{r}_{jj'}(3, \bar{2}),$$

индекс  $S$  указывает на принадлежность характеристик всей системе.

Фигурирующие в (20) неизвестные  $x_{jj_0}$  и  $y_{jj_0}$  определяют волновую функцию в соединяющем проводе. Уравнения для них следуют непосредственно из (17) и (18) при указанном выше выборе амплитуд падающих волн. Используя (19), перепишем эти уравнения в виде

$$x_{jj_0} \exp [-ik_j^{(2)} L] = \sum_{j'=1}^{\infty} y_{j'j_0} \tilde{r}_{jj'}(\bar{2}, \bar{2}), \quad (21)$$

$$y_{jj_0} \exp [-ik_j^{(2)} L] = \tilde{r}_{jj_0}(2, 1) + \sum_{j'=1}^{\infty} x_{j'j_0} \tilde{r}_{jj'}(2, 2).$$

Напомним, что для распространяющихся мод матричные элементы  $\tilde{t}_{jj'}(2, 1)$  ( $\tilde{t}_{jj'}(1, 2)$ ) и  $\tilde{t}_{jj'}(3, \bar{2})$  имеют смысл вероятности преобразования волны  $j'$  моды в волну  $j$ -й моды при прохождении электронного потока через систему I слева-направо (справа-налево) и систему II слева-направо. Амплитуды вероятности отражения в системе I представлены  $\tilde{t}_{jj'}(1, 1)$  ( $\tilde{t}_{jj'}(2, 2)$ ) при падении электронного потока слева (справа), а в системе II, проходящей электронами слева-направо —  $\tilde{t}_{jj'}(\bar{2}, \bar{2})$ .

Полученная система уравнений (21), позволяющая с учетом определений (20) найти амплитуды прошедших (из канала 1 в канал 3) и отраженных (в канале 1) волн, определяет все интересующие нас характеристики системы последовательно соединенных квантовых блоков, если известно решение задачи рассеяния для каждой из ее структурных компонент. Нахождение таких решений, с одной стороны, намного проще в вычислительном отношении, а с другой — они более просты для физической интерпретации, что облегчает понимание транспортных характеристик системы в целом.

Подчеркнем, что для использования (20) и (21) требуется знание полной матрицы  $\tilde{t}_{jj'}(n, n')$ , (т.е. расширенной  $S$ -матрицы), включающей также затухающие моды. Влияние затухающих мод на характеристики электронного прохождения системы является следствием перемешивания электронных мод в подсистемах I и II и возникновения вторичных электронных потоков в соединительном проводе, обусловленных многократным отражением электронных волн от подсистем I и II. Вторичные потоки (в силу (4)) содержат как распространяющиеся, так и затухающие электронные волны. Роль последних при  $N$ -модовом прохождении, очевидно, актуальна только в области  $|k_{N+1}^{(2)}L| \leq 1$ .

### 3. Общее решение задачи рассеяния

Представим (20) и (21) в операторной форме:

$$\begin{aligned} \hat{r}^S(1, 1) &= \hat{r}^{(1)}(1, 1) + \hat{t}^{(1)}(1, 2)\hat{X}, \\ \hat{t}^S(3, 1) &= \hat{t}^{(II)}(3, 2)\hat{Y}, \\ -\hat{r}^{(1)}(2, 2)\hat{X} + \hat{P}^{-1}\hat{Y} &= \hat{t}^{(1)}(2, 1), \\ \hat{P}^{-1}\hat{X} - \hat{r}^{(II)}(\bar{2}, \bar{2})\hat{Y} &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь  $\hat{P}_{jj'} = \exp[ik_j^{(2)}L]\delta_{jj'}$  — диагональный оператор;

$$\begin{aligned} \hat{r}_{jj}^{(1)}(n, n) &= \tilde{t}_{jj'}(n, n), \quad n = 1, 2; \\ \hat{r}_{jj}^{(II)}(\bar{2}, \bar{2}) &= \tilde{t}_{jj'}(\bar{2}, \bar{2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{t}_{jj}^{(I)}(n, n') &= \tilde{t}_{jj'}(n, n'), \quad n \neq n', \quad n, n' = 1, 2; \\ \hat{t}_{jj}^{(II)}(3, \bar{2}) &= \tilde{t}_{jj'}(3, \bar{2}). \end{aligned}$$

Подчеркнем, что матричные элементы  $\tilde{t}_{jj'}(n, n')$  берутся на базисных функциях как одного (например,  $\tilde{t}_{jj'}(1, 1)$ ), так и различных (например,  $\tilde{t}_{jj'}(1, 2)$ ) проводов. Их смысл определен в предыдущем разделе.

Для неизвестных матриц  $\hat{X}$  и  $\hat{Y}$  из (22) следует

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \hat{P}\hat{r}^{(II)}(\bar{2}, \bar{2}) \left[ \hat{I} - \hat{P}\hat{r}^{(1)}(2, 2)\hat{P}\hat{r}^{(II)}(\bar{2}, \bar{2}) \right]^{-1} \times \\ &\quad \times \hat{P}\hat{t}^{(1)}(2, 1), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\hat{Y} = \left[ \hat{I} - \hat{P}\hat{r}^{(1)}(2, 2)\hat{P}\hat{r}^{(II)}(\bar{2}, \bar{2}) \right]^{-1} \hat{P}\hat{t}^{(1)}(2, 1)$$

( $\hat{I}$  — единичный оператор), так что операторы рассеяния  $\hat{r}^S(1, 1)$  и  $\hat{t}^S(3, 1)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{r}^S(1, 1) &= \hat{r}^{(1)}(1, 1) + \\ &+ \hat{t}^{(1)}(1, 2)\hat{P}\hat{r}^{(II)}(\bar{2}, \bar{2})\hat{M}\hat{t}^{(1)}(2, 1), \\ \hat{t}^S(3, 1) &= \hat{t}^{(II)}(3, \bar{2})\hat{M}\hat{t}^{(1)}(2, 1), \end{aligned} \tag{24a}$$

где

$$\hat{M} = \left[ \hat{I} - \hat{P}\hat{r}^{(1)}(2, 2)\hat{P}\hat{r}^{(II)}(\bar{2}, \bar{2}) \right]^{-1} \hat{P}. \tag{24b}$$

Операторы  $\hat{t}^S(1, 3)$  и  $\hat{r}^S(3, 3)$  получаются из (24) заменой индексов  $I \leftrightarrow II$  и перестановкой чисел  $1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow \bar{2}$ .

Равенства (24) являются точным решением задачи рассеяния для двух последовательно соединенных двумерным проводом структур в терминах их расширенных  $S$ -матриц. Найдем теперь соответствующее выражение для проводимости системы.

Определение этой величины через амплитуды  $t_{jj}^S(3, 1)$  при абсолютном нуле температуры в линейном по приложенному полю приближении хорошо известно [4]:

$$g = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{j'=1}^{N_3} t_{jj}^S(3, 1) \left( t_{jj}^S(3, 1) \right)^*. \tag{25}$$

Используя в (25) полученное выше решение для  $t_{jj}^S(3, 1)$ , получаем

$$g = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{j=1}^{\infty (2)} \left[ \hat{t}^{(I)}(2, 1) \times \right. \\ \left. \times \hat{t}^{(I)}(2, 1) \hat{M} \hat{t}^{(II)}(3, \bar{2}) \times \hat{t}^{(II)}(3, \bar{2}) \hat{M} \right]_{jj}. \quad (26)$$

В (26) знаком  $\sum^{(2)}$  обозначена сумма по модам соединительного провода, чертой над оператором — эрмитово сопряжение данного оператора, а  $\times$  — «укороченное» произведение двух операторов: суммирование при определении матричных элементов  $[\hat{t}^{(s)} \times \hat{t}^{(s)}]_{jj}$  ведется только по незатухающим модам эмиттерного ( $s = I$ ) и коллекторного ( $s = II$ ) проводов.

Очевидно, что при замене одной из структурных компонент системы, например II, отрезком прямого провода произвольной длиной  $d$  и шириной, равной  $w_2 = w_3$  (см. рис.1,а), равенство (26) должно совпадать с (25), где  $S = I, 3 \rightarrow 2, N_3 \rightarrow N$ . Действительно, полагая

$$\hat{r}^{(II)} = 0, \quad \hat{t}_{jj'}^{(II)} = \exp \left[ ik_j^{(2)} d \right] \delta_{jj'}$$

и учитывая, что

$$\left[ \hat{t}^{(II)}(3, \bar{2}) \times \hat{t}^{(II)}(3, \bar{2}) \right]_{jj'} = 0,$$

если  $j, j' > N$ , из (26) получаем

$$g = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{j=1}^N \left[ \hat{t}^{(I)}(2, 1) \times \hat{t}^{(I)}(2, 1) \right]_{jj}.$$

Формула (26) является точной и может быть использована для практических расчетов с привлечением данных для структурных компонент системы. Заметим в этой связи, что в асимптотическом пределе  $L \gg w_2$  диагональная матрица оператора  $\hat{P}$  имеет  $N$  ненулевых компонент ( $N$  — число распространяющихся мод в соединительном проводе), так что матричные элементы оператора  $\hat{M}$  будут отличны от нуля лишь при  $j, j' \leq N$ . Поэтому бесконечное суммирование в формуле (25) оборвется на  $N$ . Это же или подобное упрощение может быть использовано и при конечных длинах  $L$ . Хорошая сходимость результатов, как правило, достигается при учете малого числа затухающих мод, что дополнительно облегчает расчеты по сравнению с решением задачи для системы в целом.

#### 4. Одномодовое прохождение электронов. Асимптотическое приближение

С точки зрения использования планарных структур различной геометрии в качестве квантовых электронных приборов (интерференционных транзисторов [7], переключателей [8] и др.) наибольший интерес в ряде случаев представляют

транспортные свойства системы в энергетическом интервале, соответствующем первой (фундаментальной) моде соединительного провода. Поэтому этот случай мы рассмотрим отдельно.

Будем считать для простоты ширины всех проводов в системе одинаковыми,  $w_1 = w_2 = w_3 = w$ . Тогда, согласно (24), для амплитуды прохождения системы по фундаментальной моде можем записать

$$t_{11}^S(3, 1) = \frac{t_{11}^{(I)}(2, 1) t_{11}^{(II)}(3, \bar{2}) \exp(\pi i q L / w)}{1 - t_{11}^{(I)}(2, 2) t_{11}^{(II)}(\bar{2}, \bar{2}) \exp(2\pi i q L / w)}, \quad (27)$$

где  $q = k_1^{(2)} w / \pi$ . Для энергий электрона, лежащих ниже порога открывания второй моды, выражение (27) является точным в определенном выше асимптотическом пределе.

Для вероятности одномодового прохождения  $T_S = |t_{11}^S(3, 1)|^2$  в асимптотическом приближении имеем

$$T_S = \left\{ 1 + \frac{1}{T_I T_{II}} \left[ (\sqrt{1 - T_I} - \sqrt{1 - T_{II}})^2 + 4\sqrt{(1 - T_I)(1 - T_{II})} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin^2 \left( \frac{1}{2} (\varphi_I + \varphi_{II}) + \pi q L / w \right) \right] \right\}^{-1}, \quad (28)$$

где  $T_I = |t_{11}^{(I)}(2, 1)|^2$ ,  $T_{II} = |t_{11}^{(II)}(3, \bar{2})|^2$  — вероятности прохождения электронной волны фундаментальной моды через структуры I и II, а  $\varphi_I = \arg [t_{11}^{(I)}(2, 2)]$ ,  $\varphi_{II} = \arg [t_{11}^{(II)}(\bar{2}, \bar{2})]$  — сдвиги фаз этой волны в соединительном отрезке, возникающие в результате отражения от структур I, II.

Существенно, что полученное выражение не соответствует буквально одномодовому приближению, а является более точным, поскольку, в отличие от последнего, подразумевает использование при расчете  $T_S$  не приближенных, а точных значений вероятностей одномодового прохождения подсистем,  $T_I$  и  $T_{II}$ . Заметим также, что формально (28) совпадает с известным (точным) результатом для одномерной задачи рассеяния — последовательного прохождения электроном двух рассеивателей, характеризуемых коэффициентами прохождения  $T_I$  и  $T_{II}$  и разделенных расстоянием  $L$ .

Если же структуры идентичны ( $T_I = T_{II} = T$ ,  $\varphi_I = \varphi_{II} = \varphi$ ), то вместо (28) получаем более простое выражение

$$T_S = \frac{T^2}{T^2 + 4(1 - T) \sin^2 [\varphi + \pi q L/w]}, \quad (29)$$

которое очевидно, но приведено здесь, поскольку в [5] использовано другое определение этой же величины:

$$T_S = \frac{T}{T + 4(1 - T) \cos^2 \Phi}. \quad (30)$$

Здесь  $\cos \Phi$  зависит от величины  $k_1^{(2)}L$  и геометрических параметров системы. Как видно из (29), асимптотически точным определением этой функции является  $\cos \Phi = \sin [\varphi + k_1^{(2)}L]T^{-1/2}$ . В цитированных выше работах для определения  $T_S$  фактически используется одномодовое приближение, что приводит к худшим результатам (см. обсуждение ниже).

Сравнение с результатами работ, выполненных ранее, будет продолжено в следующем разделе, где на примере конкретных систем рассмотрены приложения развитой теории к анализу свойств квантовой проводимости и спектра связанных состояний.

### 5. Прохождение и связанные состояния электронов в двойном прямоугольном изгибе и сужении квантового провода

#### 5.1. Двойной прямоугольный изгиб

Рассматриваемая здесь структура представляет собой последовательное соединение двух прямоугольных поворотов в одном (П-структура, рис. 1, б) или противоположном (ступенька, рис. 1, в) направлениях, разделенных расстоянием  $L$ . Потенциал электронов  $U(y)$  внутри эмиттерного, соединяющего и коллекторного проводов, до сих пор не конкретизированный, далее будем считать равным нулю внутри проводов и бесконечным вне их. В этом случае  $\chi_j = \pi j/w$ , а закон сохранения энергии (4) имеет вид

$$E_F/E_{th} = q^2 + j^2. \quad (31)$$

где  $E_{th} = \hbar^2 \pi^2 / (2m^* w^2)$  — пороговая (threshold) энергия, необходимая для вхождения электрона в провод.

Из соображений симметрии следует, что фигурирующие в (27) амплитуды отражения в соединительном проводе одинаковы для обеих конфигураций двойного изгиба:  $t_{11}(2, 2) = t_{11}(\bar{2}, \bar{2}) \equiv r(q)$ . Поэтому их характеристики одномодового прохождения и спектра связанных состояний в асимптотическом приближении неотличимы. (В случае произвольных мод  $t_{jj_0}(2, 2) = t_{jj_0}(\bar{2}, \bar{2})$  для ступень-

ки и  $t_{jj_0}(2, 2) = (-1)^{j+j_0} t_{jj_0}(\bar{2}, \bar{2})$  для П-структуры.) Уместно подчеркнуть, что, согласно точным расчетам [8–10], различия между спектрами пропускания П-структуры и ступеньки незначительны и проявляются только при  $L \rightarrow 0$ , а также вблизи порога открывания второй моды  $q_1 \equiv q \approx \sqrt{3}$ .

Перейдем к анализу свойств рассматриваемой системы на основе формулы (29), ограничиваясь тем самым областью одномодового прохождения электронов. Для этого, кроме амплитуды  $r(q)$ , необходимо также знать коэффициент прохождения через прямоугольный изгиб в бесконечном проводе,  $T_{r-ab}(q)$  ( $r-ab$  — right-angle bend). Результат точного расчета этой величины в зависимости от  $q$  [11] представлен пунктиром на рис. 2, а. Обращение  $T_{r-ab}(q)$  в нуль в точке  $q = 1,6$  свидетельствует, что  $T_S$  имеет нуль удвоенной кратности по сравнению с  $T_{r-ab}$ , т.е. область сильного отражения при двойном изгибе провода является более широкой, чем в случае одинарного (рис. 2, а). Фор-

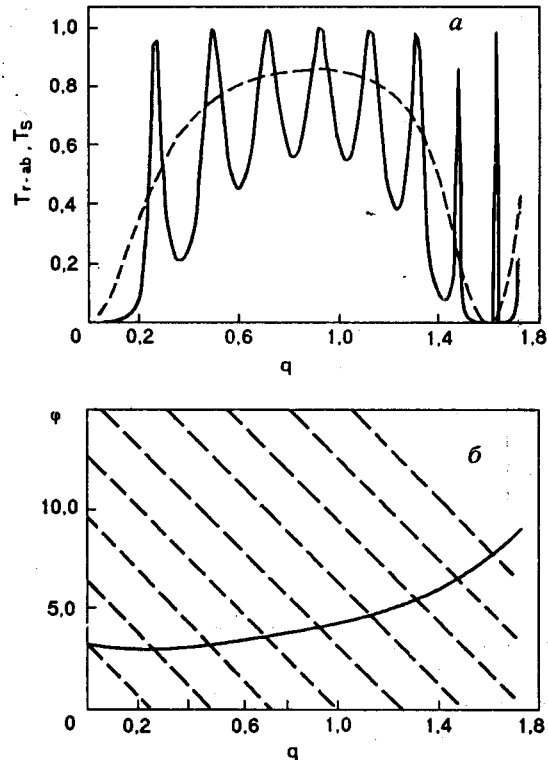


Рис. 2. Спектры пропускания П-структуры и ступеньки при  $L/w = 4$  (сплошная линия),  $q = (E_F/E_{th} - 1)^{1/2}$  — продольный волновой вектор электрона в единицах  $\pi/w$ . Пунктирной линией показана зависимость  $T_{r-ab}(q)$  (а). Сдвиг фазы волны фундаментальной моды при изменении волнового вектора  $q$  при отражении от прямоугольного поворота в бесконечном проводе (сплошная линия). Пересечения этой кривой с пунктирными прямыми определяют положения максимумов пропускания П-структуры и ступеньки при  $L/w = 4$  (см. уравнение (33)) (б).

мула (29) также показывает, что в рассматриваемой системе нет иных точек полного отражения, так как вероятность  $T_S$  не имеет нулей, отличных от нулей функции  $T_{r-ab}$ . В то же время система может обладать свойством резонансного прохождения и в том случае, когда  $T_{r-ab} \neq 1$  при любых  $q$ . Последние свойства имеют общий характер для одинаковых соединенных проводом систем.

Отметим одно возможное «приборное» приложение двойного изгиба, в котором используются свойства  $T_S$  в области сильного отражения. Как видно из (29), вероятность прохождения  $T_S$  является периодической функцией параметра  $L$  (именно  $L$ , а не  $L/w$ , так как, в силу (31),  $T_S$  зависит от  $w$  через  $r(q)$  и  $T_{r-ab}$ ). При варьировании  $L$  величина  $T_S$  изменяется с периодом  $\pi/k_1$  в пределах

$$\left( \frac{T_{r-ab}}{2 - T_{r-ab}} \right)^2 \leq T_S \leq 1. \quad (32)$$

В области, где  $T_{r-ab} \ll 1$ ,  $T_S$  как функция параметра  $L$  характеризуется резким максимумом, т.е. большим отношением  $T_S^{\max}/T_S^{\min}$ , что может найти практическое приложение. На это обстоятельство обращено внимание в [8]. Точный расчет спектра пропускания П-структуры как функции  $L$ , приведенный в [8], с высокой точностью воспроизводится при использовании формулы (29), которая позволяет легко определить положение и число резонансов (помимо тех, которые даются равенствами  $T = 1$ ) в спектре пропускания системы. Они находятся из условий

$$\varphi(q) + \pi q L/w = \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (33)$$

где  $\varphi(q) = \arg[r(q)]$  (см. (28)). Уравнение, аналогичное (33), использовалось и в [5], где, однако, физический смысл и адекватное выражение для фазы  $\varphi$  не были определены.

Расчет показывает, что  $\varphi(q)$  в точках  $q = 0,47$  и  $q = 1,42$  принимает значения соответственно  $\pi$  и  $2\pi$  (рис. 2,б), так что минимальное число резонансов  $T_S$  равно двум. Хотя этот результат получен в асимптотическом приближении, указанные значения  $q$ , соответствующие положению максимумов при  $L = 0$ , находятся в хорошем согласии с точным расчетом, который определяет положения резонансов при  $q = 0,52$  и  $1,42$  в П-структуре и при  $q = 0,43$  и  $1,45$  в ступеньке [8]. При произвольном  $L$  число резонансов определяется числом пересечений фазовой характеристики  $\varphi(q)$  семейством прямых  $\pi(n - qL/w)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Для  $L = 4w$  соответствующие графики представлены на рис. 2,б. Видно, что в зависимости от величины параметра  $L/w$  прямая, выходящая из точки  $q = \pi$ , мо-

жет как пересекать ( $L < 0,5w$ ), так и не пересекать ( $L > 0,5w$ ) фазовую кривую  $\varphi(q)$ . Таким образом, из свойств функции  $\varphi(q)$  вытекает, что число резонансов определяется целой частью (обозначаемой далее [...]) от выражения  $\varphi(\sqrt{3})/\pi + \sqrt{3}L/w \approx [2,9 + \sqrt{3}L/w]$  при  $L/w \leq 0,5$  и  $[1,9 + \sqrt{3}L/w]$ , если  $L/w > 0,5$ . (В [5] эта же величина определена формулой  $[1,5 + \sqrt{3}L/w]$ .) Как видно, число резонансов увеличивается с ростом  $L$  немонотонно: до  $L/w = 0,5$  их три, для  $0,5 < L/w < 0,63$  — два, при  $0,63 < L/w < 1,2$  — снова три, далее число резонансов увеличивается. Интересно отметить, что значение параметра  $L/w = 0,5$  является критическим также в смысле существования в системе двух или одного связанных состояний (см. объяснение ниже). При  $L/w \geq 0,5$  длина  $L_n$  (в единицах  $w$ ), при которой появляется  $(n + 2)$ -й пик в спектре  $T_S$ , равна  $L_n = (n + 0,1)3^{-1/2}$ .

Определяемые из (33) положения резонансов совпадают с результатом точного расчета спектра пропускания, представленного на рис. 2,а сплошной линией. Более того, в использованном масштабе точная кривая  $T_S(q)$  неотличима от зависимости, полученной по формуле (29). Это наглядно демонстрирует высокую точность асимптотического приближения. Отметим здесь, что, в отличие от нашего подхода, предложенный Ву и Шпрунгом вариант одномодового приближения [5, рис. 1] приводит к весьма существенным отличиям от точных результатов.

Рассмотрим теперь спектр связанных состояний двойного изгиба [8,10]. Энергия дискретных состояний определяется полюсами амплитуд рассеяния, лежащими за порогом непрерывного спектра системы  $E < E_{th}$ . Согласно (27) и (31), мнимые векторы связанных состояний  $q_1 = iq_b$  определяются из уравнения

$$r^{-1}(iq_b) = \pm \exp[-\pi q_b L/w]. \quad (34)$$

Левая часть (34) изображена сплошной линией на рис. 3. Из этих данных следует, что в проводе с двойным изгибом могут существовать два связанных состояния, отсечаемых корням (34) ( $q_b^\pm$ ).

При этом различие в энергиях

$$(E_b^- - E_b^+)/E_{th} = q_b^{-2} - q_b^{+2}$$

экспоненциально стремится к нулю с ростом расстояния между изгибами. В пределе  $L \rightarrow \infty$  имеется одно двукратно вырожденное дискретное состояние, энергия которого отстоит от края непрерывного спектра на величину  $\Delta E^\pm = (E_{th} - E_b^\pm)/E_{th} = 0,0696$  и соответствует связанному состоянию в прямоугоньно согнутом проводе [11,12]. Из (34) и



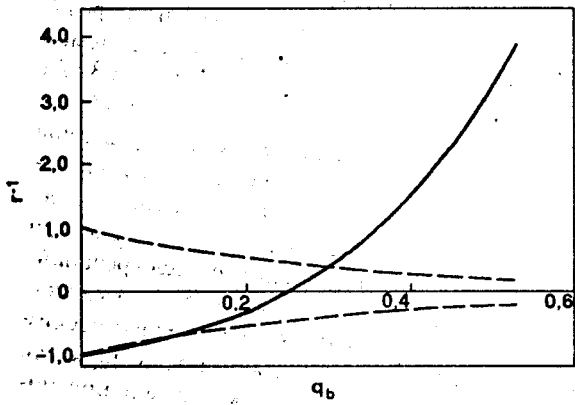


Рис. 3. Кривая  $r^{-1}(iq_b)$  (см. (34)) для прямогоугольного поворота в бесконечном проводе (сплошная линия). Пересечения этой кривой с пунктирными кривыми  $\pm \exp(-\pi q_b)$  определяют «волновые числа»  $q_b$  связанных состояний П-структуры и ступеньки при  $L/w = 1$ .

свойств функции  $r^{-1}(iq_b)$  видно, что существует критическое расстояние  $L_{cr}$ , при котором ближайший к непрерывному спектру уровень входит в зону, т.е. когда  $q_b^- = 0$ . Это расстояние определяется равенством  $L_{cr}/w = \pi^{-1} \frac{d}{dq_b} r^{-1}(iq_b) \Big|_{q_b=0} \approx 0,5$ , что

хорошо согласуется с точным значением этой величины. При  $L = 0$  решение (34) дает  $q_b^+ = 0,36$ , т.е.  $\Delta E_b^+ = 0,13$ , тогда как в [8,10] получено  $\Delta E_b^+ = 0,16$  для П-структуры и  $\Delta E_b^+ = 0,14$  для ступеньки.

Исчезновение верхнего из расщепленных уровней связанного состояния при  $L_{cr}$  позволяет понять необычную зависимость числа резонансов в спектре пропускания двойного изгиба от  $L$ . Именно с этим уровнем связано появление третьего резонанса при  $L < L_{cr}$  (см. выше).

### 5.2. Сужение провода

В приложении к данной системе развитая выше теория позволяет весьма просто получить удобное для расчетов аналитическое выражение для проводимости, использование которого дает практически полное совпадение с точными результатами при любых значениях энергии электронов и параметров структуры.

Симметричное сужение (рис.1,з) можно представить как соединение узкими частями двух проводов со ступенчатым изменением ширины. В этом случае формула (26) для проводимости имеет вид

$$g = \frac{e^2}{h} \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{\infty} \sum_{j_3=1}^{\infty} \hat{t}_{j_1 j_3}^*(2, 1) \times$$

$$\times \hat{t}_{j_2 j_3}(2, 1) \left( \frac{\hat{P}}{\hat{T} - [\hat{P}r(2, 2)]^2} \right) \Big|_{j_2 j_1}^2, \quad (35)$$

где опущены индексы идентификации подсистем I, II и (подчеркнем) суммирование по  $j, j_1, j_2$  проводится по всем модам узкого (соединительного), а по  $j_3$  — только по распространяющимся модам широкого провода.

Рассматривая задачу рассеяния в бесконечном проводе с переходом широкий-узкий, нетрудно показать, что фигурирующие в (34) амплитуды вероятностей определяются из уравнений

$$\sum_{j_2=1}^{\infty} (A_{j j_2} + \delta_{j j_2} k_j^{w'}) r'_{j_2 j_1} = \delta_{j j_1} k_j^{w'} - A_{j j_1}, \quad (36)$$

$$\sum_{j_2=1}^{\infty} (A_{j j_2} + \delta_{j j_2} k_j^{w'}) t'_{j_2 j_3} = 2k_{j_3}^w a_{j j_3}, \quad (37)$$

где

$$r'_{j_2 j_1} \equiv \left( k_{j_1}^{w'} / k_{j_2}^{w'} \right)^{1/2} \hat{r}_{j_2 j_1}(2, 2);$$

$$t'_{j j_3} \equiv \left( k_{j_3}^w / k_j^{w'} \right)^{1/2} \hat{t}_{j j_3}(2, 2);$$

$k_j^{w'}(k_j^{w'})$  — продольный волновой вектор  $j$ -й моды в широком (узком) проводе

$$a_{j j_3} = \int_{-w'/2}^{w'/2} \varphi_{j_3}^w(y) \varphi_j^{w'}(y) dy$$

— интеграл перекрытия собственных функций поперечного движения электронов в широкой ( $w$ ) и узкой ( $w'$ ) частях провода;

$$A_{j_1 j_2} = \sum_{j_3=1}^{\infty} a_{j_1 j_3} k_{j_3}^w a_{j_2 j_3}.$$

Решение (36) и (37) может быть получено в аналитическом виде при замене матрицы  $A_{j j'}$  на диагональную,  $A_{j j'} = \delta_{j j'} (K_j + iJ_j)$  [14]. В диагональном приближении имеем  $r_{j j'} = \delta_{j j'} R_j^{1/2} \exp(i\varphi_j)$  и

$$\sum_{j_3=1}^{\infty} \hat{t}_{j j_3}^*(2, 1) \hat{t}_{j_3 j_2}(2, 1) = \delta_{j j'} T_j,$$

где

$$\operatorname{tg}(\varphi_j) = 2k_j^{w'} \begin{cases} J_j \left( K_j^2 + J_j^2 - k_j^{w'2} \right)^{-1}, & \frac{E_F}{E'_{th}} \geq j^2, \\ K_j \left( K_j^2 + J_j^2 + k_j^{w'2} \right)^{-1}, & \frac{E_F}{E'_{th}} \leq j^2, \end{cases}$$

$$R_j^{1/2} = \left| \frac{K_j + iJ_j - k_j^{w'}}{K_j + iJ_j + k_j^{w'}} \right|, \quad T_j = \frac{4K_j |k_j^{w'}|}{|K_j + iJ_j + k_j^{w'}|^2}. \quad (38)$$

При подстановке этих выражений в (35) получим

$$g = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{j=1}^{\infty} T_j^2 \begin{cases} \left[ T_j^2 + 4R_j \sin^2(\varphi_j + k_j^{w'} L) \right]^{-1}, & \frac{E_F}{E'_{th}} \geq j^2, \\ \left[ \left( e^{-ik_j^{w'} L} + R_j e^{ik_j^{w'} L} \right)^2 + 4R_j \sin^2 \varphi_j \right]^{-1}, & \frac{E_F}{E'_{th}} \leq j^2, \end{cases} \quad (39)$$

$$k_j^{w'} = \frac{\pi}{w'} \left( E_F / E'_{th} - j^2 \right)^{1/2}, \quad E'_{th} = \hbar^2 \pi^2 / (2m^* w'^2)$$

— порог проводимости узкого провода.

Равенство (39) в точности совпадает с результатом, полученным при решении исходной задачи рассеяния (т.е. для системы в целом) в диагональном приближении [13]. Подчеркнем, что в (39) суммирование ведется по всем распространяющимся и затухающим модам узкого провода (для последних в выражениях для  $\varphi_j$ ,  $R_j^{1/2}$  и  $T_j$  следует заменить  $k_j^{w'}$  на  $ik_j^{w'}$ ). Определением суммы выражение (39) отличается от аналогичного результата, полученного в [14], где суммирование ограничено первой затухающей модой узкого провода. Отметим также, что в [14] расчет проводился с использованием приближенных выражений для  $K_j$  и  $J_j$ . Наблюдаемое при этом различие между предсказаниями аналитической теории и точными расчетами практически исчезает, если применять формулу (39) без каких-либо дополнительных приближений [13].

### 6. Заключение

Приведем основные результаты.

В общем виде задача определения амплитуд рассеяния при прохождении электроном двух последовательно соединенных проводов произвольных структур в 2D-пространстве сведена к нахождению решений для S-матриц каждой из компонент. В приближении линейного отклика получено также выражение для проводимости системы при аб-

солютном нуле в терминах решений задачи рассеяния для ее компонент. В предложенном подходе существенно упрощается расчет транспортных характеристик и энергетического спектра сложных систем, допускающих разделение на две последовательно соединенные подсистемы, а также облегчает физическую интерпретацию результатов, что продемонстрировано на конкретных примерах.

В случае одномодового прохождения электронов получено аналитическое, асимптотически точное (для больших длин соединяющего провода) выражение для амплитуд рассеяния. Последнее совпадает с точным результатом, соответствующим одномерному прохождению электроном двух последовательно расположенных рассеивателей.

При использовании теории для описания транспортных свойств квантового провода с двойным прямоугольным изгибом получено простое уравнение, определяющее число и положение резонансов в спектре пропускания волны фундаментальной моды как функции параметров системы. Прослежена динамика появления новых резонансов в спектре с увеличением расстояния  $L$  между поворотами провода. Показано, что при малом числе резонансов (малых  $L$ ) эта динамика нелинейна по  $L$ , т.е. число резонансов не просто увеличивается с ростом  $L$ , как ожидается интуитивно. Этот неожиданный, на первый взгляд, результат объясняется существованием квазидискретного уровня в непрерывном спектре системы, обусловленного расщеплением связанного состояния в прямоугольном изгибе провода при соединении двух изгибов. Подчеркнем, что необычная зависимость числа резо-

нансов от  $L$  формально связана с особенностью (существованием минимума, см. рис. 2,б) фазового сдвига как функции энергии электрона. Другими словами, обнаружение особенностей фазы амплитуды отражения для одной из структурных компонент системы может служить прямым указанием на существование аномалий в динамике появления резонансов в спектре пропускания всей системы при изменении длины соединительного провода.

В приложении теории к описанию проводимости провода, имеющего сужение, получено аналитическое выражение этой величины через характеристики простейшей  $2D$ -структуры — провода со ступенчатым изменением ширины. Решен, таким образом, вопрос адекватной интерпретации особенностей квантовой проводимости одной из базовых моделей точечного контакта (см. [15] и приведенные там ссылки). Отметим, наконец, что элементарный расчет по формуле (39) позволяет практически точно воспроизвести результаты, полученные ранее с использованием суперкомпьютеров.

Приложение

Доказательство формулы (11)

Поскольку система уравнений (6) и (7) является линейной, переменная  $a_j^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \bar{2}, 3$ ) может быть найдена через компоненты правой части

$$a_j^{(n)} = \sum_{n'=1(\bar{2})}^{2(3)} \sum_{j'=1}^{\infty} \Phi_{jj'}^{nn'} F_{j'}^{(n')}, F_j^{(n)} = 2ik_j^{(n)} I_j^{(n)}. \tag{П.1}$$

Величины  $\Phi_{jj'}^{nn'}$  в (П.1) полностью определяют матричными элементами левой части системы (6), (7), поэтому их можно определить через амплитуды  $t_{jj_0}(nn')$ . Для этого, полагая в (П.1)  $I_j^{(n)} = \delta_{jj_0} \delta_{np}$ , находим

$$a_j^{(n)} = \Phi_{jj_0}^{np} 2ik_{j_0}^{(p)}.$$

Последнее равенство совместно с (10) дает

$$\Phi_{jj'}^{nn'} = \frac{1}{2i \sqrt{k_j^{(n)} k_{j'}^{(n')}}} \left[ t_{jj'}(n, n') + \delta_{jj'} \delta_{nn'} \right]. \tag{П.2}$$

Подстановка (П.2) в (П.1) приводит к формуле (11).

1. B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T. Foxon, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848 (1988).
2. D. A. Wharam, T. J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ajmed, J. E. F. Frost, D. G. Hasho, D. C. Peacock, D. A. Ritchie, and G. A. C. Jones, *J. Phys.* **C21**, 1209 (1988).
3. A. T. Johnson, L. P. Kouwenhoven, W. de Jong, N. C. van der Vaart, C. J. P. M. Harmans, and C. T. Foxon, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1592 (1992).
4. M. Buttiker, in: *Electronic Properties of Multilayers and Low-Dimensional Semiconductors Structures*, Plenum Press, New York (1990).
5. Hua Wu and D. W. L. Sprung, *Phys. Rev.* **B47**, 1500 (1993).
6. Hua Wu, D. W. L. Sprung, and J. Martorell, *J. Phys.* **D26**, 798 (1993).
7. F. Sols, M. Macucci, U. Ravaioli, and K. Hess, *Appl. Phys. Lett.* **54**, 350 (1989); *J. Appl. Phys.* **66**, 3892 (1989).
8. A. I. Onipko and I. V. Zozulenko, *Semicond. Science Tech.* **8**, 2115 (1993).
9. A. Weishaar, J. Lary, S. M. Goodnick, and V. K. Tripathi, *Appl. Phys. Lett.* **55**, 2114 (1989).
10. Hua Wu, D. W. L. Sprung, and J. Martorell, *Phys. Rev.* **B45**, 11960 (1992).
11. Yu. A. Klimenko, L. I. Malysheva, and A. I. Onipko, *J. Phys.: Condens. Matter.* **5**, 5215 (1993); *Ukr. Fiz. Zh.* **38**, 1358 (1993).
12. R. L. Schult, D. G. Ravenhall, and H. W. Wyld, *Phys. Rev.* **B39**, 5476 (1989).
13. L. I. Malysheva and A. I. Onipko, *Solid State Commun.* (1994), (in press).
14. A. Szafer and A. D. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 300 (1989).
15. E. Tekman and S. Ciraci, *Phys. Rev.* **B43**, 7145 (1991).

Theory of the electron quantum transport through two series-connected planar structures

Yu. A. Klimenko and A. I. Onipko

An exact formal solution of the scattering problem for two arbitrary  $2D$  structures connected by a wire is obtained in terms of the extended  $S$ -matrixes of each of the constituents. The efficiency of the theory suggested is demonstrated on applications to some  $2D$  structures of current interest. In particular, a nonlinear variation of the number of resonances in the transmission spectrum of the double bend with the distance between the bends is predicted. When applied to constriction geometry, the theory yields an analytic expression, which almost exactly reproduces the conductance as a function of Fermi energy for arbitrary parameters of the system.