приближения на отрезке $\sigma = [0, \pi]$ переменной t определяется неравенством $\| x_2 - x \| < \frac{Dq_1^2}{(1-q_1) a^{\frac{1}{4}} (1-2k)^{\frac{1}{4}}}$, где $q_1 = \frac{4k}{a_1 (1-2k)^{1,5}}$.

SUMMARY. Formulas of the approximate solution for the second-order ordinary linear differential equation are determined by the variable scale method. The formulas contain an arbitrary parameter. The solution approximation is estimated which determines the formula and parameter choice.

1. *Бондарь Н. Г.* Колебания нелинейных систем, содержащих малый параметр.— Вопросы теории колебаний, статики и динамики мостов // Тр. Днепропетр. ин-та инж. ж.-д. транспорта. Днепропетровск, 1962.— Вып. 38.— С. 28—59.
2. *Бондарь Н. Г., Денишенко Ю. Н.* Приложение метода переменного масштаба времени к решению задач о динамическом воздействии подвижной нагрузки на сооружения // Исследования по теории сооружений.— М. : Стройиздат, 1965.— Вып. 14.— С. 73—91.
3. *Денишенко Ю. Н.* Приложение метода переменного масштаба к задаче Виллиса.— Вопросы теории колебаний и динамики мостов // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта.— М. : Транспорт, 1966.— Вып. 56.— С. 65—70.
4. *Бондарь Н. Г.* Нелинейные автономные системы строительной механики.— М. : Изд-во литературы по строительству, 1972.— 125 с.
5. *Бондарь Н. Г.* Свободные колебания нелинейных систем с двумя степенями свободы. Исследования по теории колебаний и динамике мостов // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта.— М. : Транспорт, 1968.— Вып. 73.— С. 5—40.
6. *Лесюк И. И.* Стационарные колебания нелинейного осциллятора при вязком трении произвольной величины. Динамика мостов и теория колебаний.— Там же.— 1975.— Вып. 157.— С. 36—39.
7. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем.— М. : Наука, 1967.— 420 с.

Днепропетр. ин-т инженеров ж.-д. транспорта
Поступило 11.06.86

УДК 519.21

Л. И. ГАЛЬЧУК, А. И. ОНИПКО

ДИСКРЕТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ВИДА

(Представлено академиком Ю. А. Митропольским)

В теории вероятностей и математической статистике хорошо известно гипергеометрическое распределение [1], имеющее широкий спектр практических приложений. В данном сообщении введено дискретное распределение, характеристическая функция которого удовлетворяет неоднородному (в отличие от гипергеометрического распределения) гипергеометрическому дифференциальному уравнению. Помимо характеристической функции распределения, найдено замкнутое, удобное для проведения некоторых конкретных вычислений выражение, определяющее его моменты. Исследованы асимптотические свойства введенного распределения. Представленные результаты могут быть использованы в теории одномерных неупорядоченных систем, в частности для исследования точно решаемых моделей случайных блужданий в ограниченных и бесконечных случайно разупорядоченных двухкомпонентных цепочках [2]. Интерес к таким моделям, как известно, связан с интенсивным излучением свойств квазиодномерных материалов [3].

1. Определение дискретного распределения. Случайная величина ξ имеет гипергеометрическое распределение, определяющее вероятность обнаружить в выборке без возвращения объема n из совокупности N_A

элементов типа A и N_B элементов типа B k элементов типа A, если

$$p\{\xi = k\} = \frac{\binom{N_A}{k}\binom{N_B}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \begin{array}{l} N = N_A + N_B \\ k = \overline{0, n}. \end{array} \tag{1}$$

Вероятность в выборке размера n обнаружить элементы только типа A равна $p\{\xi = n\}$. В отличие от (1), $\sum\limits_n p\{\xi = n\} = \frac{N_A}{N_B + 1} \neq 1$, и поэтому вероятности $p\{\xi = n\}$ будут задавать распределение некоторой случайной величины только при соответствующей их нормировке. Такое распределение естественным образом возникает в следующей комбинаторной задаче, имеющей ряд приложений в теории одномерных случайно разупорядоченных систем.

Рассмотрим цепочку, состоящую из N_A компонент A и N_B компонент B, случайно распределенных по $N = N_A + N_B$ узлам цепочки. Вероятность обнаружить на узле такой цепочки элемент $A(B)$ равна $N_A N^{-1}(N_B N^{-1})$, все $N!(N_A! N_B!)^{-1}$ взаимных расположений компонент (конфигураций цепочки) равновероятны. Последовательность из n элементов A, ограниченную элементами B или крайним узлом цепочки и элементом B, назовем кластером длины n из A элементов. Тогда общее число кластеров длины n $P(n)$ во всех возможных неэквивалентных линейных конфигурациях из A и B элементов можно следующим образом записать через символ Кронеккера:

$$p(n) = \sum_{q_0, q_1, \ldots, q_{N_B} = 0}^{\infty} \delta_{N_B \atop \sum\limits_{i=0} q_i, N_A} \sum_{j=0}^{N_B} \delta_{q_j, n}. \tag{2}$$

Действительно, количество кластеров длины n в некоторой произвольно взятой конфигурации цепочки есть $\sum\limits_{i=0}^{N_B} \delta_{q_i, n}$, где $q_i \in [0, N_A]$ — выраженная в числе узлов длина i-го кластера. Максимальное число кластеров из A элементов равно $N_B + 1$, q_0 и q_{N_B} — кластеры, расположенные на левом и правом концах цепочки. Суммирование проводится по всем возможным комбинациям q_i, таким, что $\sum\limits_{i=0}^{N_B} q_i = N_A$. В результате суммирования из (2) получим

$$p(n) = \frac{(N_B + 1)(N - n - 1)!}{(N_B - 1)!(N_A - n)!}. \tag{3}$$

Значение (3), отнесенное к $\sum\limits_n p(n)$, определяет вероятность обнаружить кластер длины n из A элементов в случайной последовательности из N_A элементов A и N_B элементов B

$$P(n) = \frac{N_B(N_A - 1)!(N - n - 1)!}{(N - 1)!(N_A - n)!}. \tag{4}$$

Как видно, распределение кластеров по длинам (4) совпадает с распределением, определяемым нормированными вероятностями $p\{\xi = n\}$, если заменить в (4) N на $N + 1$ и N_B на $N_B + 1$.

Определение физических характеристик ограниченных бинарных случайно разупорядоченных одномерных систем в некоторых случаях сводится к нахождению средних по распределению (4). В качестве примера можно указать на описание процессов переноса энергии возбуждения и заряда, укладывающихся в рамки формальной схемы $A + B \to B$.

В [4] на основе усреднения по распределению $P(n)$ определен квантовый выход люминесценции молекул основного вещества (A) и ловушек (B) в квазиодномерных кристаллах, а также исследованы особенности кинетики спада интенсивности люминесценции, обусловленные флуктуациями плотности ловушек. В [5, 6] найдены частотная и концентрационная зависимости прыжковой проводимости в рамках перколяционной модели неупорядоченной бесконечной [5] и конечной [6] цепочек. Возможны и другие приложения введенного дискретного распределения вероятностей, свойства которого рассмотрены ниже.

2. Характеристическая функция и моменты. Как известно [1], достаточно полную информацию о распределении вероятностей содержит его характеристическая функция

$$\varphi(t) = \sum_n \exp(itn) P(n).$$

Помня о связи распределений (1) и (4), будем искать характеристическую функцию (4) в виде гипергеометрической функции Гаусса

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{z^n}{n!},$$

$(\cdot)_n$ — символ Похгаммера, $(a)_n = a(a+1) - (a+n-1)$, которая при a или b, равных отрицательному целому $(-m)$, сводится к полиному степени m относительно z. Нетрудно показать, что характеристическая функция распределения (4) имеет следующий вид:

$$\varphi(t) = N_B N_A^{-1} [F(1, -N_A; -N+1; \exp(it) - 1] \tag{5}$$

и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - e^{it}) \left[-\frac{d^2\varphi}{dt^2} + i(N_A - 1) \frac{d\varphi}{dt} - N_A \left(\varphi + \frac{N_B}{N_A} \right) \right] + N_A \left(\varphi + \frac{N_B}{N_A} \right) + \\ + i(N_B + 1) \frac{d\varphi}{dt} = 0. \tag{6}$$

Однородное уравнение, соответствующее (6), является гипергеометрическим дифференциальным уравнением, которому при значениях параметров $-n$, $-N_A$, $N_B - n + 1$ удовлетворяет характеристическая функция распределения (1) [7].

Характеристическая функция $\varphi(t)$ определяет моменты распределения $P(n)$

$$\mu^{(j)} = \sum_{n=1}^{N_A} n^j P(n), \tag{7}$$

однако известная процедура расчета $\mu^{(j)}$ по характеристической функции в общем случае весьма громоздка, причем с ростом j сложность вычислений $\mu^{(j)}$ быстро возрастает. Поэтому представляет интерес получение общей формулы для произвольного момента $\mu^{(j)}$, удобной для практических расчетов. Для этого воспользуемся представлением факториалов через контурные интегралы, что дает возможность провести следующие вычисления (при $j \neq 0$):

$$\frac{(N-1)!}{(N_A - 1)! N_B!} \mu^{(j)} = -\frac{j!}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{N_A} \int_{|z|<1} dz \int_{|z'|<1} dz' e^{zn} (1 + z')^{N-n-1} z^{-j-1} \times \\ \times (z')^{-N_A+n-1} = \frac{j!}{2\pi i} \int_{|z|<1} dz z^{-j-1} (N_A!)^{-1} \frac{d^{N_A}}{dz'^{N_A}} \{(1 + z')^N [1 +$$

$$+z'(1-e^z)]^{-1}\}|_{z'=0}=\sum_{k=0}^{j}\binom{N}{N_A-k}\frac{j!}{(j-k)!}\frac{d^{j-k}}{dz^{j-k}}[(e^z-1)^k z^{-k}]|_{z=0}. \quad (8)$$

Функция $(e^z-1)z^{-1}$ является производящей функцией для чисел Стирлинга 2-го рода $\sigma_j^{(k)}$ [7], поэтому

$$\mu^{(j)}=\sum_{k=1}^{j}k!\sigma_j^{(k)}\prod_{l=1}^{k}\frac{N_A-l}{N_B+l}(N_A-k)^{-1}N. \quad (9)$$

С помощью (9) легко вычисляются моменты распределения (5), центрированные относительно $\mu^{(1)}$

$$\mu_{ц}^{(j)}=\sum_{n=1}^{N_A}P(n)[n-\mu^{(1)}]^j=\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\left(-\frac{N}{N_B+1}\right)^l\mu^{(j-l)}.$$

В частности, дисперсия распределения $P(n)$ равна

$$\sigma^2=\mu_{ц}^{(2)}=NN_B(N_A-1)(N_B+1)^{-2}(N_B+2)^{-1}.$$

Аналогично можно получить и другие характеристики распределения $P(n)$.

3. Асимптотический ($N\to\infty$) вид распределения $P(n)$ ($P_{as}(n)$).

Для исследования предельных свойств распределения (4) получим выражение для $\lim\limits_{N\to\infty}P(n)$ при $N_BN^{-1}\equiv c=\text{const}\,(N_AN^{-1}=1-c)$

$$\frac{N_B(N_A-1)!\,(N-n-1)!}{(N-1)!\,(N_A-n)!}=N_B\frac{\prod\limits_{l=1}^{N_A-1}(N_A-l)\prod\limits_{l=1}^{N-n-1}(N-n-l)}{\prod\limits_{l=1}^{N-1}(N-l)\prod\limits_{l=1}^{N_A-n}(N_A-n-l+1)}=$$

$$=c(1-c)^{n-1}\frac{\prod\limits_{l=1}^{n-1}\left[1-\frac{l}{N(1-c)}\right]}{\prod\limits_{l=1}^{n}\left(1-\frac{l}{N}\right)}\xrightarrow[N\to\infty]{}c(1-c)^{n-1}\equiv P_{as}(n). \quad (10)$$

Асимптотическое распределение $P_{as}(n)$ совпадает с геометрическим распределением $c(1-c)^s$ с точностью до множителя $1-c$. Характеристическая функция $P_{as}(n)$ есть

$$c\sum_{n=1}^{\infty}e^{itn}(1-c)^{n-1}=\frac{c}{1-c}\{[1-(1-c)e^{it}]^{-1}-1\},$$

поэтому все (кроме нулевого) моменты распределения $P_{as}(n)$ и геометрического распределения, характеристическая функция которого, как известно, равна $c[1-(1-c)e^{it}]^{-1}$, отличаются только множителем $1-c$. Дифференцирование характеристической функции позволяет определять эти моменты, однако с ростом j, как и в случае распределения $P(n)$, такая процедура становится все более громоздкой. Для получения моментов асимптотического распределения $P_{as}(n)$ в общем виде воспользуемся известным свойством чисел Стирлинга 2-го рода [7]

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^jx^n=\sum_{k=0}^{j}\sigma_j^{(k)}x^k\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Тогда $(j \neq 0)$

$$\mu_{as}^{(j)} = c \sum_{n=1}^{\infty} n^j (1-c)^{n-1} = \frac{c}{1-c} \sum_{k=1}^{j} \sigma_j^{(k)} (1-c)^k \frac{d^k}{d(1-c)^k} \left(\frac{1}{c}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{j} k! \sigma_j^{(k)} (1-c)^{k-1} c^{-k} = \sum_{k=1}^{j} (-1)^k c^{-k} \sum_{l=k}^{j} l! \sigma_j^{(l)} (-1)^l \binom{l-1}{k-1}.$$

Выражение для коэффициентов разложения $\mu_{as}{}^{(j)}$ по обратным степеням c можно упростить

$$\sum_{l=k}^{j} l! \sigma_j^{(l)} (-1)^l \binom{l-1}{k-1} = \sum_{l=k}^{j} (-1)^l \binom{l-1}{k-1} \frac{j!}{2\pi i} \int\limits_{|z|<1} dz (e^z - 1) z^{-j-1} =$$

$$= \frac{j!}{2\pi i} \int\limits_{|z|<1} dz z^{-j-1} (-1)^k \frac{(e^z-1)^k}{(k-1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-e^z)^l}{l!} (l+k-1)! =$$

$$= \frac{j!}{2\pi i} \int\limits_{|z|<1} dz (-1)^k z^{-j-1} \frac{(e^z-1)^k}{(k-1)!} \cdot \frac{(k-1)!}{e^{zk}} =$$

$$= \frac{d^j}{dx^j} [(e^{-x}-1)^k] |_{x=0} = k! (-1)^j \sigma_j^{(k)}.$$

Таким образом,

$$\mu_{as}^{(j)} = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+j} k! \sigma_j^{(k)} c^{-k}. \tag{11}$$

Нетрудно убедится, что (11) совпадает со значением предела $N \to \infty$ (при $c = \text{const}$) для $\mu^{(j)}$ (см. (9)).

Подчеркнем, что $\mu_{as}^{(j)}(1-c)$ при $j \neq 0$ совпадают с моментами геометрического распределения. Следовательно, формула (11) определяет эти моменты в удобном для вычислений виде.

В заключение отметим одно приложение формулы для моментов (11), позволяющей выразить в общем виде сумму ряда

$$S_j = \sum_{k=1}^{\infty} k^j x^k$$

(в [8] выражение S_j приведено только для частных значений $j = \overline{0, 4}$)

$$S_j = x(1-x)^{-1} \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+j} (1-x)^{-k} k! \sigma_j^{(k)} =$$

$$= x(1-x)^{-1-j} \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+j} k! \sigma_j^{(k)} \sum_{l=0}^{j-k} \binom{j-k}{l} (-x)^l = x(1-x)^{-1-j} \sum_{l=0}^{j-1} x^l a_l^j,$$

где

$$a_l^j = \sum_{m=l}^{j-1} (-1)^{m+l} (j-m)! \sigma_j^{(j-m)} \binom{m}{l}$$

и удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$a_l^{j+1} = (l+1) a_l^j + (j+1-l) a_{l-1}^j.$$

SUMMARY. A new discrete probability distribution is introduced. Its characteristic function satisfies a nonhomogeneous hypergeometrical differential equation. Expressions for all the moments of the distribution are obtained and its asymptotic properties are studied.

1. *Кендалл М., Стьюарт М.* Теория распределений.— М.: Наука, 1966.— 587 с.
2. *Onipko A. I.* An application of the cluster length distribution to the exact solution of the problem of random walks on finite chains with chaotically distributed pure absorbers // Phys. Lett. A.— 1984. - **101**, N 8.— P. 383—385.
3. *Excitation* dynamics in random one-dimensional systems / S. Alexander, J. Bernasconi, W. R. Schneider, R. Orbach // Rev. Mod. Phys.— 1981.— **53**, N 2.— P. 175—198.
4. *Гальчук Л. И., Онипко А. И.* Прыжковый перенос энергии возбуждения в молекулярных цепочках с хаотическим распределением ловушек.— Киев, 1986.— 28 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т теор. физ.; ИТФ-86-75 Р).
5. *Odagaki T., Lax M.* acHopping conductivity of a one-dimensional bond—percolation model // Phys. Rev. Lett.— 1980.— **45**, N 10.— P. 847—850.
6. *Гальчук Л. И., Онипко А. И.* Прыжковая проводимость в перколяционной модели ограниченной случайно разупорядоченной цепочки.— Киев, 1985.— 24 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т теор. физ. ИТФ-85-12 Р).
7. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И.— М.: Наука, 1979.— 830 с.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды.—М.: Наука, 1981.— 798 с.

Ин-т теорет. физики АН УССР,
Киев

Поступило 02.01.86

УДК 519.21

Акад. АН УССР В. С. КОРОЛЮК, Ю. В. БОРОВСКИХ

ПРЕДЕЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ U-СТАТИСТИКИ МНОГОКРАТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ВИНЕРА—ИТО

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины со значениями в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathbf{A})$ и одинаковым распределением P. Рассмотрим U-статистику

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} \Phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}), \tag{1}$$

где $\Phi: (x_1, \ldots, x_m)\to\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ — симметрическая функция переменных, $m\leqslant n$. Предположим, что $E\Phi=0$, $E\Phi^2<\infty$ и определим функции $\Phi_c(x_1, \ldots, x_c)=E(\Phi\,|\,X_1=x_1, \ldots, X_c=x_c)$, $c=1, \ldots, m$.

Пусть k, $1\leqslant k\leqslant m$ обозначает порядок вырожденности ядра Φ, т. е. k — наименьшее целое число, удовлетворяющее условию

$$0 = E\Phi_1^2 = \ldots = E\Phi_{k-1}^2 < E\Phi_k^2. \tag{2}$$

В работах [1, 2] (см. также [3] и [4, с. 74]) показано, что при $n\to\infty$ для U-статистики (1) имеет место слабая сходимость

$$n^{k/2}U_n \xrightarrow{d} \eta, \tag{3}$$

где случайная величина η определяется в виде многократной суммы

$$\eta = \binom{m}{k} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)=1}^{\infty} f(i_1, \ldots, i_k) \prod_{i=1}^{\infty} H_{\gamma(i)}(\tau_i), \tag{4}$$

при этом $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — независимые стандартные нормальные случайные величины; $H_r(x)$ — полином Эрмита порядка r; $\gamma(i)$ — число появлений